Filosofía

Hao Wang

Reflexiones sobre Kurt Gödel

Alianza Universidad

Reflexiones
sobre Kurt Gödel

Alianza Universidad

Hao Wang

Reflexiones sobre Kurt Gödel

Versión española de
Pilar Castillo Criado

Alianza
Editorial

Título original: *Reflections on Kurt Gödel*

Reservados todos los derechos. De conformidad con lo dispuesto en el art. 534-bis del Código Penal vigente, podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reprodujeren o plagiaren, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica fijada en cualquier tipo de soporte sin la preceptiva autorización.

© 1987 Massachusetts Institute of Technology
© Ed. cast.: Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1991
Calle Milán, 38; 28043 Madrid; telef. 200 00 45
ISBN: 84-206-2690-2
Depósito legal: M. 37.309-1991
Impreso en Lavel, Los Llanos, nave 6, Humanes (Madrid)
Printed in Spain

INDICE

Prefacio 9
Abreviaturas y referencias 13
Cronología 19

PARTE PRIMERA
HECHOS

1. Una vida dedicada al trabajo de fundamentación teórica. 46
   1.1. Carta del Dr. Rudolg Gödel (RG) 48
   1.2. El cuestionario de Grandjean (GQ) 52
   1.3. Mi evaluación de 1972 64
   1.4. Aspectos de la labor de toda una vida 68
   1.5. La amistad entre Gödel y Einstein 69
2. Algunos hechos acerca de Kurt Gödel 83
   2.1. El texto de 1976 84
   2.2. Relación con el Círculo de Schlick 91
   2.3. La espectacular respuesta a Hilbert 96
   2.4. Algunas comparaciones con Wittgenstein 104
3. Una relación cronológica: Europa Central (1906-1939). 116
4. Prosigue la relación: los años de Princeton (1940-1978). 163

Parte II
PENSAMIENTOS

5. Observaciones introductorias 209
5.1. Por vía de Einstein 209
5.2. Comentarios sobre los siguientes capítulos 221
6. Conceptos en el ámbito de la ciencia y la tecnología . 232
6.1. Computadores y procedimientos mecánicos 234
6.2. Práctica matemática 238
6.3. Lógica matemática 242
6.4. La naturaleza de la matemática 246
6.5. La teoría de la relatividad y el concepto de tiempo. 252
7. Gödel y la filosofía 257
7.1. Realismo conceptual 258
7.2. Aspectos de la filosofía gödeliana 264
7.3. El objetivismo centrado en la teoría de números. 273
8. *Auseinandersetzungen* 286
8.1. Metafísica religiosa 291
8.2. Del optimismo racionalista 298
8.3. La verdad y el espíritu de la época 303
9. El ajuste de todas las partes 314
9.1. El ajuste de las cosas 315
9.2. Aspectos metódicos 324
9.3. Ladrillos, adoquines y pistas 331
9.4. Notas y observaciones adicionales 344

Parte III
TEXTOS

10. Ensayos matemáticos 360
10.1. La completud de la lógica elemental 360
10.2. Incompletabilidad de la matemática 370
11. Ensayos filosóficos 381
11.1. El problema de la evidencia 387
11.2. Cantor y la teoría de conjuntos 392
11.3. Russell y la lógica matemática 409
Indice analítico 429

PREFACIO

La figura de Kurt Gödel no ha tenido parangón en más de un siglo en cuanto a su capacidad para combinar contribuciones verdaderamente importantes a la ciencia con un trabajo filosófico serio y profundo. Persona sumamente reservada, sus importantes resultados han sido objeto de una atención cada vez más amplia desde su muerte en 1978. Sin embargo, en general, se conoce relativamente poco de su obra, y sus audaces especulaciones sobre diversas cuestiones perennes de interés universal permanecen aún enterradas en material no publicado, salvo breves afirmaciones dispersas insertas en contextos un tanto especializados. Mis reflexiones no pretenden ser sino un primer intento de considerar su vida y su obra como un todo dentro de un amplio contexto que resulte asequible para la mayoría del público instruido. Creo que Gödel ejemplifica una forma de vivir y de trabajar que inspira una mayor fe en la razón, pone en entredicho los «prejuicios de la época», e incita a nuestra imaginación a luchar por una mayor autonomía analizando nuestro sentido ampliamente derivativo de lo que es importante en la vida.

Tengo la suerte de haber mantenido un estrecho contacto con Gödel durante sus últimos años. A través del mismo he logrado familiarizarme con él como persona y también con esa parte de su pensamiento que está más allá de los resultados matemáticos objeto de admiración universal. La tarea de pensar por extenso en algo que es objeto de admiración es gratificante. Pero el incentivo para escri-

bir sobre Gödel ha provenido más de la creencia en que el reflexionar sobre él sería un medio efectivo de esclarecer mis propios pensamientos filosóficos, determinando dónde y por qué estoy de acuerdo o en desacuerdo con él. Mas, una vez que fue tomada la decisión de hacerlo, se ha ido desarrollando una tendencia natural a desear aprender más acerca de él y a considerar otros aspectos relativos a su persona. Para ello, he consultado a varias personas informadas, he leído material escrito (publicado y no publicado) acerca de Gödel, he echado una rápida ojeada a su Nachlass (legado literario), y he reconstruido mis conversaciones con él.

En febrero de 1986 quedó completa una versión del libro proyectado, pero las partes relativas a las ideas gödelianas no publicadas no resultaban satisfactorias. Lo que menos me gustaba era la organización de las conversaciones reconstruidas y especialmente el no haber logrado obtener y presentar una versión coherente de las distintas facetas de lo que Gödel me había contado. Tras un periodo de frustrados esfuerzos por corregir este defecto, decidí finalmente retirar los capítulos que tenían que ver con los pormenores de las confidencias privadas (orales o escritas) de Gödel y tomarlos como base para un libro independiente, que va a titularse *Conversations with Kurt Gödel*. El presente libro es una versión revisada de los capítulos que dependen menos del material no publicado. Dejando las otras partes para un libro distinto, seré capaz no sólo de mejorar la organización de ambos libros, sino también de proseguir mi doble tentativa de reflexionar sobre el punto de vista de Gödel y de formular uno propio alternativo.

Ambos libros tratan de hacer a Gödel asequible a quienes no son especialistas ni en lógica ni en filosofía, sin por ello dejar de considerar ideas nuevas a un nivel que suponga un desafío para los expertos. En este libro, el material que sólo tiene primordial interés para lógicos profesionales y filósofos ha quedado en buena medida relegado a partes concretas de los dos capítulos del suplemento (capítulos 10 y 11), en los que se examina el texto de cinco de los famosos artículos de Gödel con el fin de mejorar la valoración de los mismos. De los nueve capítulos que componen el cuerpo de este libro, sólo el capítulo 6 se centra directamente en el sentido y las implicaciones de los principales resultados matemáticos de Gödel. Los otros ocho creo que caen dentro del ámbito de cosas que resultan total e igualmente accesibles, sin necesidad de mediación, a toda persona culta.

En 1982 se inició un proyecto de publicar los *Collected Works* de Gödel (en siglas CW), de los que el primer volumen ha aparecido en 1986. Hay otros volúmenes en preparación. En Viena se están preparando una película y un libro sobre la vida y la obra de Gödel. La película está bajo la dirección de Peter Weibel y de Werner Schimanovich, y el libro también lo editan ellos, junto con Eckehart Köhler. Todas estas obras son, en muchos aspectos, complementarias de mis libros. Estoy agradecido a los directores y editores por compartir conmigo alguna de su información.

Estoy agradecido, por su permiso para emplear citas y fotografías del Nachlass de Gödel, al Instituto de Estudios Avanzados, a su director Harry Woolf, y al comité responsable de esos artículos: Enrico Bombieri, Armand Borel, y John Milnor. El Nachlass, que había sido donado, a la muerte de Gödel en 1978, por su mujer Adele al Instituto, ha sido catalogado durante el periodo 1982-1984 por John Dawson, que también hizo un inventario (mecanografiado) en julio de 1984. Tanto él como Cheryl Dawson me han prestado una generosa e indispensable ayuda no sólo en lo relativo al uso del Nachlass, sino también por compartir conmigo parte de su conocimiento fáctico así como en otros aspectos. El Nachlass fue entregado como préstamo indefinido a la División de manuscritos de la Biblioteca Firestone de la Universidad de Princeton a comienzos de 1985 y permanece a disposición de los estudiosos desde el 1 de abril, conservando el Instituto todos los derechos para su uso. Jean Preston, el encargado de los manuscritos de la Biblioteca Firestone, está al cuidado del Nachlass, y tanto él como sus colegas han sido sumamente amables conmigo y de gran ayuda.

En respuesta a mis indagaciones, Rudolf Gödel me ha enviado una elegante carta sobre su hermano. Köhler y Schimanovich han aliviado de diversas formas los esfuerzos que he tenido que hacer para familiarizarme con hechos relacionados con Gödel. En concreto, me han facilitado cartas escritas por Gödel a su madre (y hermano), el guión de la película sobre él, y la memoria de Karl Menger así como algunas fotografías. Estoy muy agradecido a los tres. Las cartas se hallan en la Wiener Stadtund Landesbibliothek, y el Dr. Franz Patzer me ha concedido amablemente permiso para citarlas.

Las citas de los artículos de Carnap (véase la sección 2.2) proceden de la Colección Rudolf Carnap integrada en el Departamento de Colecciones Especiales de las Bibliotecas de la Universidad de

Pittsburgh. Estoy agradecido a la universidad por el privilegio de haberme permitido emplear el material y a Richard Nollan que ha dispuesto las cosas para que me concedieran el permiso. Deseo dar también las gracias a Stephen Kleene y a Olga Taussky-Todd por permitirme emplear las copias mecanografiadas de las conferencias que presentaron en el simposio de Salzburgo de julio de 1983.

Marie Grossi me ha facilitado enormemente todo el proceso consistente en convertir las páginas manuscritas en el texto impreso. De entre las diversas cosas mías escritas hasta ahora, este libro es su favorito. Ella y Antai Ko han mejorado también la presentación.

Nota sobre la segunda edición

Aprovecho esta oportunidad para poner al día y corregir algunos ítems. El cuidadoso índice fue realizado por Antai Ko. La grave úlcera de Gödel ocurrió en 1951, no en 1945; esto está ahora corregido en el texto. D. R. Hofstadter señaló un grave error de traducción (la oración con que empieza el final de la p. 35) y facilitó la nueva versión correcta. Marie Grossi y E. Köhler detectaron algunas erratas.

Desde junio de 1986 ha llegado a mí alguna información más. Por ejemplo, se sabe más del transfondo familiar de Gödel y de sus ideas políticas; como que en sus tiempos de estudiante, sacaba a la familia a pasear en coche y conducía deprisa, etc. Pero no es el momento de introducir añadidos extensos.

ABREVIATURAS Y REFERENCIAS

A. *Abreviaturas*

Además de algunos otros obvios, los ítems principales son los siguientes.

BA	Wang 1985
BP	Benacerraf and Putnam (BP2 para la segunda edición revisada)
CG	*Conversations with Kurt Gödel* (en preparación)
CP	Carnap
CW(I)	Gödel 1986
FG	J. v. Heijenoort
GQ	Gödel 1975
HA	Hilbert y Ackermann
HB	Hilbert y Bernays
I.A.S.	(o el Instituto) el Instituto de Estudios Avanzados, Princeton, NJ
JSL	*The Journal of Symbolic Logic*
LM	Gödel 1945-1966
MP	Wang 1974
PM	Whitehead and Russell
PNAS	*Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*

RG Carta del Dr. Rudolf Gödel dirigida a mí, citada en la sección 1.1
WS Weibel and Schimanovich

B. *Escritos de Gödel*

Sólo se incluyen los ítems principales considerados en este libro.

1929 La tesis doctoral (para más detalles, véase la sección 10.1). Incluida en *CW*.
1930 (1929) El ensayo sobre la completud, terminado en 1929 y publicado en 1930 (véase la sección 10.1). Incluido en *FG* y *CW*.
1931 (1930) El ensayo sobre la incompletud. También nos referimos a él como el famoso ensayo, el célebre ensayo, el ensayo de 1931, etc. (véase la sección 10.2). Incluido en Davis, *FG*
y *CW*.
1939 La prueba de consistencia de la hipótesis generalizada del continuo, *PNAS*, vol. 25, pp. 220-224. Incluido en *CW*.
1944 El ensayo sobre Russell (véase la sección 11.3). Incluido en BP.
1945-1966 *LM*. Cartas a su madre (y hermano).
1947 y 1964 El ensayo sobre Cantor (véase la sección 11.2). Incluido en BP.
1949 El ensayo sobre Einstein. Observación acerca de la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía idealista. Schilpp 1949, pp. 447-450. Para ensayos relacionados con éste, véase la sección 6.5.
1958 y 1969 El ensayo sobre Bernays (véase la sección 11.1).
1970 «My notes 1940-70», citadas en las páginas introductorias de la parte I, con permiso del I.A.S.
1974 Contribuciones a *MP* (tal como se hallan especificadas en su prefacio).
1975 *GQ*. El cuestionario de Grandjean. La forma completa y el material afín se citan en la sección 2.2, con permiso del I.A.S.
1986 *CW. Collected Works*, vol. I (publicaciones de 1929-1936), edi-

tados por Solomon Feferman, John W. Moore, Robert M. Solovay, y Jean van Heijenoort. Los volúmenes siguientes se hallan en preparación.

C. *Escritos de otros*

Las referencias que aparecen en contextos aislados se dan sólo en el cuerpo del libro.

Paul Benacerraf y Hilary Putnam, editores
1964. BP. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (BP 2, segunda edición, 1983).
Georg Cantor
Works. Gesammelte Abhandlungen, 1932.
Rudolf Carnap
CP. Los artículos de Carnap (las páginas relativas a Gödel), citados en la sección 2.2, capítulo 4 (epígrafe *1929),* y sección 6.2, con permiso de la Universidad de Pittsburgh.
Ronald W. Clark
1971. *Einstein: The Life and Times,* Avon Books Edition, 1972.
Paul J. Cohen
1966. *Set Theory and the Continuum Hypothesiss.*
Martin Davis, editor
1965. *The Undecidable.*
John W. Dawson, Jr.
1983. La obra publicada de Kurt Gödel, *Notre Dame Journal of Formal Logic,* vol. 4, pp- 255-284 (addenda y corrigenda, vol. 25, pp. 283-287).
1984. Kurt Gödel in sharper focus, *The Mathematical Intelligencer,* vol. 6, n.º 4, pp. 9-17.
1986. A Gödel Chronology, *CW,* pp. 37-43.
Richard Dedekind
1888. *Was Sind und Was Sollen die Zahlen?*
Solomon Feferman
1986. Gödel's life and work, *CW,* pp. 1-36.
Gottlob Frege
1979. *Begriffsschrift,* recogido (en versión inglesa) en *FG.*
Jean v. Heijenoort, editor
1967. *FG. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic.*

David Hilbert y Wilhelm Ackermann
1928. HA. *Grundzüge der theoretische Logik,* primera edición.
David Hilbert y Paul Bernays.
HB. *Grundlagen der Mathematik,* vol. 1, 1934 y 1968; vol. 2, 1939 y 1970.
Douglas R. Hofstadter
1979. *Gödel, Escher, Bach.*
Gerald Holton y Yehuda Elkana, editores
1982 *Albert Einstein: Historial and Cultural Aspects.*
Stephen Kleene
Gödel's impression on students in the 1930s, *Gödel Remembered* (Actas del simposio celebrado en Salzburgo en julio de 1983), ed. P. Weingartner y L. Schmetterer, 1987, pp. 49-64.
Eckehart Köhler
Gödel und der Wiener Kreis, de próxima aparición.
Georg Kreisel
1980. Kurt Gödel, de 28 de abril de 1906 a 14 de enero de 1978, *Biographical Memoirs of Fellows of The Royal Society,* vol. 26, pp. 148-244 (correcciones, vol. 27, p. 697, y vol. 28, p. 718).
Karl Menger
(1981). Recollections of Kurt Gödel (versión inglesa de Eckehart Köhler, 1982), de próxima aparición.
Abraham Pais
1982. *«Subtle Is the Lord...», the Science and Life of Albert Einstein.*
Frank P. Ramsey
1931. *The Foundations of Mathematics.*
Constance Reid
1970. *Hilbert.*
Bertrand Russell
1903. *Principles of Mathematics* (segunda edición, con nueva introducción, de 1937).
Paul A. Schilpp, editor
1949. *Albert Einstein, Philosopher-Scientist.*
Carl Seelig
1960. *Albert Einstein.*
Thoralf Skolem
1970. *Selected Works in Logic,* editadas por Jens E. Fenstad, estando varios de los artículos relevantes recogidos en *FG.*
Olga Taussky-Todd

Remembrences of Kurt Gödel, en el volumen reseñado antes bajo Kleene, pp. 29-48.

Alan M. Turing

1936. On computable numbers, *Proceedings of the London Math. Soc.*, vol. 42, pp. 230-265 (correcciones en el volumen 43, pp. 544-546), incluido en Davis.

Hao Wang

1962. *Survey. A Survey of Mathematical Logic* (reeditado en 1970 con el título de *Logic, Computers and Sets*).

1974. *MP. From Mathematics to Philosophy.*

1981. *Popular Lectures on Mathematical Logic.*

1985. *BA. Beyond Analytic Philosophy.*

Peter Weibel y Werner Schimanovich

WS. *Drehbuch für den Film «Kurt Gödel: Ein Mathematischer Mythos»*, manuscrito de 1986.

Alfred North Whitehead y Bertrand Russell

PM. Principia Mathematica, 3 vols., 1910-1913 (segunda edición del volumen I, con adiciones de Russell, de 1925).

Ludwig Wittgenstein

1922. *TractatusLogico-Philosophicus.*

Harry Woolf, editor

1980. *Some Strangeness of Proportion.*

CRONOLOGIA

La relación cronológica de Gödel (que se ofrece en los capítulos 3 y 4) se ha incrementado tanto que para poder ver las cosas de una ojeada, como era su propósito en un principio, se requiere un resumen.

1906. Nace el 28 de abril en Brünn, Moravia.
c. 1911. Padece «sobre los cinco años una leve neurosis de ansiedad».

1912. El 16 de septiembre se inscribe en la Evanfelissche Privat-Volks-und Burgerschule, de Brünn. Era un niño muy inquisitivo; la familia le llamaba «El Sr. Por qué», der Herr Warum.

c. 1914. En torno a los ocho años padece un grave reumatismo acompañado de fiebre elevada.

1916. El 5 de julio se gradúa en la Evangelischeschule. En el otoño entra en el Staats-Realgymnasium mit deutscher Unterrichtsprache de Brünn.

1919. 1919-21, estudio formal del sistema de taquigrafía Gabelsberger. Entretanto, en la escuela, interés romántico por un amigo de la familia diez años mayor (durante un año y pico).

c. 1920. Comienza su interés por las matemáticas (a los 14 años). Su hermano Rudolf marcha a la Universidad de Viena a estudiar medicina.

c. 1921. Inicio del interés por las matemáticas y la filosofía (en torno a los 15 años). Lee la teoría de Goethe de los colores y su crítica de Newton y ello influye indirectamente, según G, en su elección de vocación (véase el capítulo 3, *1921*).

c. 1922. Primer estudio de la obra de Kant.

c. 1923. A los 16-17 dominaba ya las materias matemáticas universitarias. En el colegio, es un alumno que destaca primero en las lenguas, luego en historia, y más tarde en matemáticas.

1924. El 19 de junio se gradúa en el Realgymnasium. Su capacidad de concentración en el trabajo y de mantenimiento del interés eran obvias ya en el colegio. En el otoño, ingresa en la Universidad de Viena con el fin de especializarse en física teórica.

1925. Asistencia al curso de historia de la filosofía impartido por H. Gomperz en 1925/26 y adopción de la postura filosófica del «realismo matemático». Asistencia también al curso o seminario impartido por M. Schlick sobre filosofía de la matemática. Es probable que empezara también los cursos de P. Furtwängler sobre teoría de números, y, posiblemente también en esta época, el curso de Hans Thirring sobre teoría de la relatividad. Comienzo de una estrecha amistad con H. Feigl y M. Natkin, dos estudiantes de filosofía más mayores. Solicita en la biblioteca la *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (1785) de Kant.

1926. Tránsito de su interés primordial de la física teórica a las matemáticas. Comienza a participar en algunas actividades del Círculo de Moritz Schlick (más tarde conocido como Círculo de Viena). Amistad con una chica más joven con aspiraciones intelectuales, probablemente en torno a esta época. Fama de hombre brillante. Disposición a ayudar a los compañeros.

c. 1927. Primer contacto con Adele, su futura mujer. Primera lectura del *Tractatus* (que nunca leyó completo). Las fichas de préstamo bibliotecario indican su interés por la teoría de números.

1928. Asistencia a una o dos de las conferencias impartidas por Brouwer el 10 y el 14 de marzo. Cambio de interés hacia la lógica

matemática. Asistencia al curso que sobre «los fundamentos filosóficos de la aritmética» imparte Carnap durante el semestre de invierno de 1928/29. Publicación de HA en donde se formulan como problemas abiertos el problema de la completud y el de la decisión de la lógica elemental. Conferencia de Hilbert en Bolonia (septiembre) en la que se plantean explícitamente las cuestiones de la completud y de la consistencia de los sistemas matemáticos. Solicitudes en la biblioteca de cosas de lógica, entre otras los libros de E. Schröder y Frege (las dos cosas en octubre).

1929. Muerte inesperada de su padre el 23 de febrero (había nacido el 28 de febrero de 1874). Renuncia a la ciudadanía checa el 26 de febrero y adquiere la austríaca el 6 de junio. Hahn y Furtwängler aprueban el 6 de julio su tesis doctoral (en la que prueba la completud de la lógica elemental). Una versión revisada es recibida para su publicación el 22 de octubre. Asistencia al primer encuentro regular del coloquio de Menger el 24 de octubre.

1930. Grado de Dr. Phil. conseguido el 6 de febrero. En el verano obtiene una versión combinatoria del primer resultado de completud, que es anunciada en público en Königsberg el 7 de septiembre. Poco después el primer teorema es formulado en la forma conocida y el segundo descubierto. Se comunica un resumen a la Academia de Ciencias de Viena el 23 de octubre y el famoso artículo es recibido para su publicación el 17 de noviembre. El I.A.S se crea formalmente a finales del otoño pero no empieza realmente a funcionar hasta el 2 de octubre de 1933.

1931. Correspondencia con Herbrand y Zermelo. Probablemente trata de escribir la segunda parte de su famoso ensayo y comienza a trabajar en la hipótesis del continuo y sobre intuicionismo. Según testimonio de su hermano, tuvo una seria depresión nerviosa a finales de año. Preparación de notas para el seminario de lógica de Hahn de 1931/32.

1932. El famoso ensayo es presentado ante la Universidad de Viena para su Habilitationsschrift, y la Habilitación es conseguida el 1 de diciembre. Obtiene y presenta tres importantes resultados sobre los sistemas formales de la aritmética y la lógica intuicionista (véanse las notas incluidas bajo los epígrafes 1932, 1933e y 1933f en la página 421 de *CW*).

1933. El 11 de marzo se convierte en Dozent y poco después imparte su primer curso («Los fundamentos de la aritmética»). Presentación (el 22 de junio) y publicación de un largo ensayo (sobre el Entscheidungsproblem), el primero desde el artículo de 1931 (el artículo reseñado en la p. 422 de *CW* como 1933i). Viaje por mar a América del 30 de septiembre al 6 de octubre. En otoño primer encuentro con Einstein. Ponencia ante el congreso anual de la Am. Math. Soc. («The present situation in the Foundations of Mathematics», 30 de diciembre).

1934. Conferencias en el I.A.S. entre febrero y mayo; se introducen las funciones recursivas generales y es presentada su idea de 1930 sobre el concepto de verdad. Conferencias en la NY Philosophical Soc. (18 de abril) y la Washington (DC) Acad. of Sci. (20 de abril) sobre sus teoremas de incompletud. Regreso por mar a Europa entre el 26 de mayo y el 3 de junio. Hahn muere el 24 de julio. En otoño ingresa en el sanatorio (Purkersdorft) para ser tratado de una depresión. Parece que también tuvo problemas con su dentadura.

1935. Descubre los conjuntos constructibles y su propiedad de ser modelos de los axiomas normales de la teoría de conjuntos (incluido el axioma de elección); en el otoño le comunica estas ideas a v. Neumann. Curso en Viena (a partir del 4 de mayo) sobre «Selected topics in math. logic». Presentación de un artículo sobre la longitud de las pruebas (19 de junio). Viaje a América en barco en compañía de Bernays entre el 20 y el 28 de septiembre. Repentina renuncia (el 17 de noviembre) a acudir al I.A.S. debido a una grave depresión. Viaje a Le Havre del 30 de noviembre al 7 de diciembre, seguido de un descanso y recuperación en Viena.

1936. Más tiempo en el sanatorio. Es un año en el que su salud es excepcionalmente mala. Schlick es asesinado el 22 de junio.

1937. Tercer y último curso («Axiomatik der Mengenlehre») en Viena (meses de mayo y junio). Descubrimiento en la noche del 14-15 de junio, según el primer volumen del Arbeitshefte del Nachlass, de un paso decisivo para la verificación de la hipótesis generalizada del continuo (CH); en julio le comenta a v. Neumann la (idea general de la) demostración. Trabaja tratando de dar a ésta una forma satisfactoria y empieza a ocuparse de la independencia de CH.

1938. Austria es anexionada a Alemania el 13 de marzo. Matri-

monio con Adele el 20 de septiembre. Viaja en barco a América entre el 6 y el 15 de octubre dejando a Adele en Viena. Conferencias en el I.A.S. sobre la consistencia relativa de GCH entre octubre y diciembre; las notas revisadas sobre estas conferencias se publicaron en 1940 como una monografía, siendo ésta su única publicación en forma de libro. Anuncio de resultados sobre conjuntos constructibles (comunicado el 9 de noviembre) en *PNAS*, vol. 24, pp. 556-557. Conferencia ante el congreso anual de la Am. Math. Soc. (28 de diciembre) sobre la consistencia de GCH.

1939. Clases en Notre Dame desde enero o febrero hasta mayo. Primera publicación sobre su prueba de consistencia de GCH (comunicación de 14 de febrero) en *PNAS*, vol. 25, pp. 220-224. El título de Privatdozent es abolido probablemente en marzo y Gödel se muestra preocupado a causa de la violación de sus derechos. Viaje de vuelta del 14 al 20 de junio. El 1 de septiembre comienza la II guerra mundial y a Gödel se le considera «apto para el servicio de defensa». El 25 de septiembre se presenta para el puesto de Dozent neuer Ordnung (aunque no lo consigue hasta el 28 de junio de 1940). Conferencia en Göttingen el 15 de diciembre. El 19 de diciembre recibe permiso para salir de Alemania (junto con Adele).

1940. El 8 de enero a Gödel y a Adele se les facilitan visas *non-quota* para emigrar a USA. Dejan Viena el 18 de enero y llegan a San Francisco (vía Rusia y Japón) el 4 de marzo. Llegan a Princeton (probablemente a finales de marzo) donde se establecen de un modo estable durante prácticamente las cuatro décadas siguientes. Conferencia en la Universidad de Brown el 15 de noviembre. Probablemente da también una serie de conferencias sobre teoría de conjuntos en el I.A.S.

1941. Descubre la idea principal de su interpretación de la aritmética (publicada por primera vez en el ensayo sobre Bernays) probablemente el 1 de enero. Conferencia sobre esta interpretación en la Universidad de Yale el 15 de abril. En la primavera da en el I.A.S. un curso sobre esta cuestión.

1942. Comienza a tener frecuentes contactos con Einstein (contactos que perdurarán hasta la muerte de Einstein en 1955). Según el Arbeitsheft 15, descubre su idea de cómo probar la independencia del axioma de elección en el verano (en Blue Hill House, Han-

cock Country, Maine). Trata de extender sin éxito la prueba a la CH. El 18 de noviembre es invitado a escribir un artículo sobre «Russell's mathematical logic», y acepta la invitación poco después.

1943. Entre 1943 y 1946 estudia a Leibniz. El 17 de mayo envía el manuscrito de su artículo sobre Russell, cuya versión revisada está lista el 28 de septiembre.

1944. La serie de notas incluidas bajo el membrete «Max» se considera que son notas filosóficas. Que yo sepa, no han sido descifradas aún. Unas doscientas páginas fueron redactadas este año, incluyendo Max 11 (28 de enero a 14 de noviembre, 153 páginas) y partes de Max 10 (12 de marzo de 1943 a 27 de enero de 1944, 93 páginas) y Max 12 (15 de noviembre de 1944 a 5 de junio de 1945, 119 páginas).

1945. El 11 de abril muere Roosevelt. En enero de 1947 G califica esta muerte como «uno de los hechos más deplorables de este siglo», y en junio de 1948 apoya a Henry Wallace por haber sido un «estrecho colega» de Roosevelt. El 30 de noviembre se le invita a escribir lo que más tarde será el ensayo sobre Cantor.

1946. El 1 de julio se convierte en miembro permanente del I.A.S. El 31 de agosto tiene ya listo un borrador a máquina del artículo sobre Cantor, pero la revisión del mismo le llevará todavía varios meses. Es invitado por Schilpp (el 10 de julio o tal vez verbalmente en mayo) a escribir un artículo de homenaje a Einstein. Conferencia en la celebración del bicentenario de la Universidad de Princeton sobre problemas de las matemáticas (17 de diciembre, texto publicado en Davis).

1947. Trabaja sobre relatividad general y filosofía kantiana. En diciembre, publicación del artículo sobre Cantor. Adele pasa en Europa unos siete meses (de mayo a noviembre).

1948. El 2 de abril reciben tanto él como Adele la ciudadanía americana. Sigue trabajando en los aspectos matemáticos y filosóficos de la relatividad general, obteniendo nuevas soluciones para las ecuaciones einstenianas del campo.

1949. Publicación (en julio) de un artículo matemático y (en diciembre) de otro filosófico sobre relatividad general (y el concepto

de tiempo). Conferencia (en mayo) en el I.A.S. sobre sus nuevas soluciones a las ecuaciones del campo. Einstein es hospitalizado a comienzos de año. El 3 de agosto compra una casa en el 129 (más tarde cambió al 145) de Linden Lane.

1950. Continúa trabajando (hasta comienzos de 1951) en cosmología y en el concepto de tiempo. Conferencia pronunciada el 31 de agosto en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Cambridge, Massachusetts, sobre «Rotating universes in general relativity theory».

1951. Entre enero y marzo cae enfermo y es hospitalizado. El 14 de marzo recibe (junto con Julian Schwinger) el primer premio Einstein. La Universidad de Yale le concede (en junio) el doctorado honorario en letras. Se propone visitar en otoño a su madre, pero cambia de opinión alegando que necesita más tiempo para preparar su Gibbs Lecture (impartida el 26 de diciembre en la Universidad de Brown sobre «Some basic theorems on the foundations of mathematics and their philosophical implications»).

1952. Doctor honorario en Ciencias por la Universidad de Harvard (19 de junio). Aprecia la mención en la que se le considera «el descubridor de la verdad matemática más significatica de este siglo». Vacaciones de verano en Asbury Park, NJ. El 31 de octubre anota, «Mis conocidos me lo dicen, hacía ya mucho tiempo que no tenía tan buen aspecto [como ahora]». Einstein está enfermo durante un par de semanas.

1953. El 1 de julio se convierte en profesor del I.A.S. Adele parte en marzo para Europa donde permanece largo tiempo. Acepta (el 2 de julio) la invitación de Schilpp (15 de mayo) para escribir un ensayo sobre la filosofía de Carnap, ensayo en el que Gödel trabajará varios años. Carnap visita el I.A.S. entre 1952-1954, y Brouwer en otoño.

1954. Trabaja bastante en el ensayo de Carnap, que, dicho sea de pasada, sigue sin publicarse hasta la fecha. Vacaciones de verano en Asbury Park. Mala salud en otoño.

1955. Elegido miembro de la Academia Nacional de Ciencias (de USA). El 18 de abril muere Einstein, lo cual supone una gran pérdida personal para Gödel, que durante los dos meses siguientes se

siente sumamente perturbado. En otoño responde a la petición de Carl Seelig con dos cartas sobre Einstein.

1956. Adele va a Viena en febrero y regresa en marzo con su madre. Acepta la invitación para escribir un artículo para un Bernays Festchrift (a propósito de su 70 cumpleaños en 1958), artículo que más tarde se convierte en el artículo sobre Bernays. Recibe una gran felicitación por su 50 cumpleaños de la comisión para la cultura y la educación de la ciudad de Viena. De nuevo hace planes (únicamente) para visitar a su madre en Europa.

1957. Elegido miembro de la Academia Americana de Artes y Ciencias. Muerte de v. Neumann (el 8 de febrero, a los 53 años). Invita a su madre a visitarle (en carta del 11 de noviembre).

1958. Visita de su madre y hermano en mayo. Publicación del artículo sobre Bernays (presentado sobre el 10 de julio).

1959. Empieza a estudiar la obra de Husserl. La madre de Adele, que había vivido con ellos varios años, muere el 13 de marzo en Princeton. Adele va a pasar las vacaciones de verano a las Montañas Blancas y visita de nuevo Europa en otoño. Bernays y Kurt Schütte visitan en 1959/60 el I.A.S.

1960. Es probable que continúe su estudio de la obra de Husserl. En primavera recibe la visita de su madre y hermano. Adele emprende en el otoño un viaje a Europa.

1961. Elegido miembro de la Sociedad Filosófica Americana. Tiene problemas con el estómago a comienzos de año. Habla de adaptarse mejor a su nuevo horario de acostarse y levantarse temprano. Escribe cuatro cartas «teológicas» a su madre (véase sección 8.1). Adele visita Italia y España entre julio y septiembre. Clifford Spector, que discutió de lógica con Gödel durante 1960/61, fallece en el I.A.S. (el 29 de julio a edad temprana).

1962. Habla de haberse sumergido en un libro filosófico de especial interés para él, pero no menciona el libro. En otoño recibe la visita de su madre y su hermano.

1963. En abril, Paul J. Cohen pone en circulación una versión preliminar de sus pruebas de independencia en teoría de conjuntos. Gödel estudia la obra y presenta una versión revisada del artículo (en dos partes, 30 de septiembre y 27 de noviembre) ante la PNAS. Antes de abril había sido concluida una expansión del artículo so-

bre Cantor y más tarde se le añade un postscriptum con una referencia al resultado de Cohen.

1964. Publicación del artículo ampliado dedicado a Cantor. Añade un postscriptum (con fecha de 3 de junio) a las conferencias de 1934 para su publicación en Davis (1965). En mayo recibe la visita de su madre y de su hermano. Adele pasa las vacaciones de verano en la playa.

1965. Se muestra contento con la nueva biblioteca del I.A.S. y con su nuevo despacho pegado a ella. Adele está ausente (en Europa) en julio y agosto.

1966. Simposium organizado por la Academia de Ciencias de Ohio para celebrar el 60 cumpleaños de Gödel, que se celebra en la Universidad del Estado de Ohio (21-23 de abril). Rechaza el ofrecimiento para ser profesor honorario de la Universidad de Viena y miembro honorario de la Academia de Ciencias Austríaca. Su madre, Marianne (Handschuh), que había mostrado grandes deseos de estar en Princeton para el 60 cumpleaños de Gödel, fallece en Viena el 23 de julio (había nacido el 31 de agosto de 1879). El 1 de julio Carl Kaysen se convierte en el (nuevo) director del I.A.S. Adele pasa en Europa el mes de julio.

1967. Elegido miembro honorario de la London Math. Soc. Doctorado honorario en Ciencias por el Amherst College (en junio). Me escribe una carta (fechada el 7 de diciembre, comentando el material que le había mandado el 27 de julio y el 14 de septiembre) en la que explica el importante papel desempeñado por su postura filosófica en su obra matemática. El 7 de marzo de 1968 me envía una segunda carta complementaria.

1968. Elegido miembro extranjero de la Royal Society (de Londres). Trabaja en una versión inglesa ampliada de su artículo sobre Bernays.

1969. Según Oskar Morgenstern, Gödel confiesa que, desde finales de la década de 1960 no es capaz de comprender el trabajo de los lógicos más jóvenes.

1970. Su salud es muy mala este año, especialmente durante los primeros meses.

1971. En octubre comienza a mantener sesiones regulares de dis-

cusión conmigo, las cuales se prolongarán hasta finales de 1972. Algunas de las discusiones de los meses iniciales se tradujeron en las contribuciones de Gödel a *MP* (como se especifica en su prefacio).

1972. Elegido miembro correspondiente de la British Academy y miembro correspondiente del Institut de France. Sc. D. «honoris causa» por la Universidad de Rockefeller (1 de junio).

1975. El presidente Ford le concede la Medalla Nacional de Ciencias (el 18 de septiembre). Acordamos que yo visite el I.A.S. durante 1975/76, y tenemos largas discusiones durante este periodo, fundamentalmente por teléfono.

1976. El 1 de julio es nombrado profesor emérito. A finales de marzo es hospitalizado. Hay propuestas de tratar sus problemas de salud en el Hospital de la Universidad de Pennsylvania, pero él no accede.

1977. Adele se opera en julio y está fuera de casa hasta el 18 o 19 de diciembre. Ella es la que persuade a Gödel para que entre en el hospital de Princeton (el 29 de diciembre). El 26 de julio fallece en Princeton O. Morgenstern, un íntimo amigo (había nacido en 1902). El 18 de septiembre Bernays (que había nacido en 1888) corre en Zurich la misma suerte.

1978. Fallece el sábado 14 de enero, a la una de la tarde, en el hospital a causa de «malnutrición e inanición». Pocos días después se celebra un funeral privado. El I.A.S. organiza un encuentro en su memoria el 3 de marzo.

1979. El 24 de marzo la Association for Symbolic Logic dedica un congreso al trabajo de Gödel. Publicación del *Gödel, Escher, Bach* de D. R. Hofstadter.

1981. Adele muere el 4 de febrero (había nacido el 4 de noviembre de 1899) y lega el Nachlass de Gödel al I.A.S.

1983. Se dedican dos sesiones de un congreso internacional a Gödel (julio, Salzburgo).

1984. Se completa en julio la catalogación de los trabajos de Gödel.

1985. El 1 de abril los trabajos de Gödel quedan disponibles para

los estudiosos en la Biblioteca Firestone de la Universidad de Princeton.

1986. Publicación del primer volumen de los *Collected Works* de Gödel. Conferencias dedicadas a Gödel en Viena (abril), Kirchberg (Austria, agosto), y Bucarest (octubre).

Parte primera
HECHOS

Los hechos de la vida y la obra de Gödel sugieren consideraciones que están más allá del mundo académico, y requieren una perspectiva histórica en términos de siglos.

Todo el mundo come, duerme, necesita cobijo, goza de buena o mala salud, tiene una familia y otro tipo de contactos con la gente, trabaja o se gana la vida de un modo u otro, afronta el tema del dinero, descansa, toma decisiones, juzga, se equivoca, hace conjeturas, sufre, goza, crece, se hace mayor, muere, etc. Esta humanidad compartida proporciona un canal de comunicación con toda persona, estableciendo una relación entre ella y el modo en que alguien, en este caso G, con la peculiaridad de ser un solitario y un pensador profundo, afronta los componentes universales de necesidades y deseos humanos. La limitación del grupo de personas que están interesadas en una vida (en concreto, en la de G) está determinada por su especificidad, la cual incrementa al mismo tiempo la intensidad del atractivo ejercido sobre los que caen dentro del grupo. Lo que distingue a G de la mayoría de la gente son los varios modos significativos en los que transciende a su propio siglo, en lo que respecta tanto a sus pensamientos, preocupaciones y estilo de vida como a la compañía espiritual que guarda en su mente.

Lo normal es considerar a G como un matemático y, en cuanto tal, se le ha comparado con Arquímedes y con Gauss. Así, por ejem-

plo, el profesor E. Hlawka, de la Universidad de Viena, observa que G comparte con Gauss la costumbre de posponer la entrega de originales para la publicación, pero que la prudente actitud de G hacia el descubrimiento de la independencia de la hipótesis del continuo difiere en cambio de la reacción de Gauss ante el descubrimiento de la geometría no-euclídea. Pero es más apropiado considerar a G como un «científico-filósofo». Para hallar una obra de calibre comparable, en los dominios de la ciencia y de la filosofía, hay que remontarse hasta Descartes (31 de marzo de 1596-11 de febrero de 1650) y Leibniz (3 de julio de 1646-14 de noviembre de 1716). No obstante, parece que G se identifica a sí mismo con Leibniz más que con ningún otro.

El impacto de las ideas científicas y de las especulaciones filosóficas de G ha ido en aumento y el valor de sus implicaciones potenciales puede seguir incrementándose. Puede que falten cientos de años para la aparición de confirmaciones o refutaciones más concretas de algunas de sus conjeturas más amplias. Así por ejemplo, él habla de la necesidad de un órgano físico para manipular impresiones abstractas e insinúa la posibilidad de que la filosofía emerja como teoría exacta «en los próximos cien años o incluso antes» (*MP*, p. 85). También cree que habrá refutaciones científicas de lo que él llama «el mecanicismo biológico», así como de la proposición de que «no hay mente separada de la materia»; además, cree que es prácticamente cierto que «las leyes físicas, en lo que respecta a sus consecuencias observables, tienen un límite de precisión finito» (*MP*, p. 326). En sus conversaciones recomienda el importante proyecto de buscar lo que podríamos denominar una «religión racional».

(Una cuestión que G se planteó en público en 1972, y que yo también me había planteado antes a mí mismo, es la de la viabilidad de un computador «que conozca» su propio programa. Una dificultad estriba en conferir a esta idea un significado menos vago, quizás por el procedimiento de ponerla en conexión con ideas que carezcan de su simplicidad aparente. Recientemente se me ha ocurrido que el problema tal vez pudiera enfocarse tratando de hallar algo similar al oculto «núcleo racional» de la *Fenomenología del espíritu* de Hegel, es decir, en términos de un viaje hacia el conocimiento de uno mismo en un mundo formado por computadores. Un proyecto como éste es seguro que haría algo en pro de la reconciliación entre humanistas y tecnólogos.)

El carácter fundamental del trabajo de G, fortalecido con su hermosa amistad con Einstein, hace que sea más difícil resistir a la tentación de compararle con él y de crear una «clase natural» de dos miembros, formada por los principales «filósofos naturales» de este siglo. Por lo demás, una caída lleva a otra. Dada la conocida asociación de Einstein con Newton, ¿por qué no ampliar la comparación por analogía? El reto estriba en hallar un x tal que Einstein sea respecto a G lo que Newton respecto de tal x. Los candidatos indiscutibles son Descartes y Leibniz. El héroe de G es Leibniz y ambos son grandes lógicos. Por otro lado, G considera que la monadología leibniziana guarda una estrecha relación con su filosofía. Al mismo tiempo, el carácter absolutamente concluyente de sus innovaciones matemáticas parece más similar a la invención cartesiana de la geometría analítica, y su simpatía hacia Husserl, más afín al interés predominante en Descartes por los métodos de un nuevo estilo de pensamiento y por los inicios de un nuevo tipo de filosofía.

En una carta dirigida a su madre (fechada el 9 de diciembre de 1953, incluida en *LM*), seguramente respondiendo a una pregunta de ella, G hace el siguiente comentario sobre el peso de la fama:

Meinen «Ruhm» hab ich bisher in keiner Weise unangenehm empfunden. Das fängt erst dann an, wenn man einmal so berühmt, ist dass einen jedes Kind auf der Strasse kennt, wie das bei Einstein der Fall ist. Dann kommen ab u. zu Irrsinnige, die ihre Wahnvorstellungen erkärt haben wollen, oder sich über die Zustände in dieser Welt beschweren. Aber wie Su siehst, ist auch das nicht gefährlich, da ja Einstein bereits das Alter von 74 Jahren erreicht hat. [En traducción aproximada: Hasta ahora, no me ha resultado en modo alguno gravosa mi «fama». Esto solo empieza a ocurrir cuando uno se vuelve tan famoso que es reconocido por cualquier niño en la calle, como es el caso de Einstein. En este caso, aparecen por doquier tontos que quieren exponer sus estrafalarias ideas o que quieren lamentarse de la situación del mundo. Pero, como comprenderás, el peligro tampoco es tan grande; después de todo, Einstein ya ha conseguido llegar a la venerable edad de 74 años.]

La fama de G se ha difundido más ampliamente desde su muerte en 1978. Casualmente, el libro tan sorprendentemente popular *Gödel, Escher, Bach* se publicó en 1979. Se han dedicado numerosas conferencias a su vida y a su obra. Ha aparecido el primer volumen de sus obras completas. En 1987 se fundó en Austria una Sociedad Gödel. La creciente atención a él y a su obra tiene que ver

con las cada vez más amplias aplicaciones de los computadores. Así, por ejemplo, un simposio en su honor se anuncia ofreciendo como tema el tópico «Inteligencia digital: de la filosofía a la tecnología».

Es posible que la conexión existente entre la obra de G y los computadores sea más estrecha que la que hay entre la obra de Einstein y la bomba atómica, a propósito de la cual (en su carta del 11 de mayo de 1950 dirigida a su madre), G dice «Creer que fueron los descubrimientos de Einstein los que principalmente hicieron posible la bomba atómica es un error. Naturalmente, él también contribuyó indirectamente a ella, pero lo esencial de su trabajo está en otra dirección totalmente distinta». Creo que G se manifestaría igual acerca de la conexión entre su obra y los computadores.

La «otra dirección totalmente distinta» no es sino la teoría fundamental (en «filosofía natural»), la cual constituye el objetivo vital (central) tanto para G como para Einstein. Esta dedicación común, el gran éxito logrado en ella (por vías distintas pero mutuamente reconocidas) y su propensión a adentrarse cada vez más en los secretos de la naturaleza son tres factores cuya combinación constituye el sólido fundamento de su amistad y de sus frecuentes interacciones. Cada uno de ellos ve en el otro a un igual intelectual que, por añadidura, comparte la misma tradición cultural. Por una feliz coincidencia, desde 1933 han sido, además, miembros del mismo «club» (el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton).

No es fácil hallar en la historia ejemplos comparables de intimidad entre científicos-filósofos tan destacados. Las relaciones de amistad entre Newton y Locke o entre Leibniz y Huygens no fueron desde luego tan estrechas. Faraday y Maxwell se admiraron y complementaron mutuamente, pero tuvieron poco contacto personal. Entre intelectuales de otras clases hay algunos casos famosos: Goethe y Schiller, Hegel y Hölderlin, Marx y Engels.

¿Cómo condiciona la dedicación al trabajo teórico fundamental la vida de uno? En el caso de G, la concentración en la teoría supone un distanciamiento completo de los asuntos mundanos, con la consiguiente exclusión de toda participación en actividades prácticas que excedan el ámbito universal de lo que se requiere para la vida diaria. El centrarse en lo fundamental entraña seleccionar y restringir los objetivos y compromisos, a fin de que cada pista pueda recibir una dosis de atención relativamente más amplia. El principio rector no es sino el de emprender pocos tipos de actividad y

que éstos sean en cierto modo del orden más elevado. A diferencia de Einstein, G extiende esta restricción a todos los aspectos externos de su vida y de su trabajo: tener contacto sólo con pocas personas, publicar poco y concisamente, dar pocas clases, aceptar pocas invitaciones, viajar poco, escribir menos pero mejores (e incluso más largas) cartas (por ejemplo, que su madre en su correspondencia), etc. Cuando adquiere un compromiso (con otros), lo cumple concienzudamente hasta el final, por lo que generalmente cumple lo prometido, aún cuando suela tardar en concluir lo solicitado. Una notable excepción la constituye el artículo para el homenaje a Carnap («Is mathematics syntax of language?»), al que había dedicado varios años, pero que al final optó por no entregar. En 1951, G prometió más o menos visitar a su madre, pero no llegó a hacerlo (ni entonces ni después).

Como era de esperar, G (tampoco) logró completar todos los grandes proyectos que se había trazado (o, para decirlo en otras palabras, no logró cumplir todos los compromisos consigo mismo). Un ejemplo conocido lo constituye su trabajo inacabado tendente a probar la independencia de la hipótesis del continuo. En lo que respecta a la filosofía, confesó no haber llegado nunca a lo que buscaba. El Nachlass de G contiene varios manuscritos inacabados y numerosas notas privadas que revelan el amplio abanico de sus lecturas e investigaciones. Tanto este material como las conversaciones con él denotan un deseo de perseguir y experimentar una gran cantidad de metas (o al menos submetas) y sendas alternativas.

El excepcional talento de G para saber qué dejar de lado (en la búsqueda de una teoría fundamental) parece combinarse con la meticulosidad de su preparación, que incluye una amplia acumulación y análisis de lo que a él le parece relevante de la literatura. Su actitud en contra de la «acumulación de datos» (cuando se trata de hacer filosofía) no implica la exclusión de la lectura o exploración de una gran cantidad de material ni tampoco del uso imaginativo (a título de comparación) de algunos de los intentos previamente seleccionados de «conocerse a uno mismo».

La dedicación de G a la teoría y su fe en la razón parecen estar excepcionalmente dotados de universalidad y confianza (e independencia). Lo que quiero destacar con esto es su propensión a pensar de principio a fin en todos los aspectos de la vida y del conocimiento, a llegar a conclusiones razonadas que frecuentemente van contra lo establecido, a investigar hasta las consecuencias lógicas más

remotas, y a adherirse firmemente a lo que para él es la consistencia y, sobre todo, la verdad. Como todos ignoramos tantas cosas acerca de tantas cuestiones fundamentales y cruciales a propósito de las cuales nuestros deseos y emociones influyen inevitablemente en la determinación de nuestras creencias y actitudes, era de esperar que el omnímodo ejercicio de la mente poderosamente lógica de G llevara a conclusiones tentativas y probables (para él) que a la mayoría de la gente le parecen implausibles, irrelevantes, contrarias al sentido común (o a las autoridades reconocidas) o incluso «estrafalarias».

Acabo de mencionar algunas de las conjeturas de G acerca de grandes cuestiones teóricas (acerca de una mente separada, acerca del «mecanicismo biológico», etc.). Más adelante consideraré también la atención por él prestada a la hipótesis de que hay otra vida; ha hablado también (no sé con qué grado de seriedad) de rocas que tienen experiencia y de espíritus que hoy se esconden. (Tiene razón en la medida en que no está demostrado que ninguno de esos ejemplos sea «lógicamente» imposible. Pero la mayoría de nosotros no presta mucha atención a lo que sólo es «lógicamente» posible. En el caso de las rocas, se puede concebir la idea como una propuesta de ampliación del uso de la palabra «experiencia» con objeto de hacer una filosofía unificada (como hace Leibniz en su monadología). Se cuenta la anécdota de que G, en el interrogatorio a que fue sometido para conseguir la ciudadanía, trató de explicar cómo la constitución americana permite acciones que pueden llevar al fascismo (véase el capítulo 4, epígrafe *1948*). Es cierto que no era el momento apropiado para una explicación así, pero ésta muy bien pudiera ser, no obstante, una contribución significativa (de posible relevancia práctica) a la teoría política.

La mayoría de nosotros tendemos a asumir las asociaciones o conexiones comúnmente aceptadas de una creencia o actitud con otra. Una vez elegida una, generalmente adoptamos la otra sin pensar más. Este no suele ser el caso por lo que respecta a G. Aún cuando no cuestiona, en líneas generales, la validez de la ciencia actual, en sus aspectos más conocidos, desconfía de algunas de sus aserciones fundamentales y las atribuye a los «prejuicios de la época» (como se desprende de algunas de sus conjeturas mencionadas antes). En este sentido, su actitud recuerda el impopular escepticismo de Einstein hacia el carácter definitivo de la teoría cuántica. En política, su admiración por Roosevelt fue compartida por la mayoría

de sus colegas, pero al contrario que muchos de ellos (incluido Einstein) él se mostró favorable a Eisenhower. La suya, como la de Einstein, fue una actitud cosmopolita, y fue también un fervoroso amante de la paz.

La correspondencia con su madre contiene también observaciones de G acerca de su experiencia en los dominios del cine, el arte y la literatura (especialmente las biografías). Es indudable que éstas presentan un aspecto de G como persona, pero probablemente, no tienen demasiado interés intrínseco. De acuerdo con WS, G se mostró interesado por el arte abstracto y surrealista (visitando con frecuencia el Museo de Arte Moderno de Nueva York), y entre sus autores favoritos figuran Goethe, Kafka, Gottfried Kästner, Stefan Zweig, Arthur Schnitzler, Franz Werfel, y Heimito von Doderer. Su preferencia por la música «ligera» (Richard y Johann Strauss, Franz Lehar, la música de danza española, la música «pop», Carmen, etc.) y su entusiasmo por las películas de Walt Disney (especialmente, por *Snow White*) son generalmente considerados sorprendentes y de mal (o tal vez «retardado») gusto, toda vez que la mayoría de sus colegas son dados a cultivar y disfrutar de placeres más «sofisticados» por influencia de una tradición cultural de índole intelectual. Pero la independencia de G en este punto puede considerarse también como indicio de una mayor disposición a reconocer lo que a uno le gusta y como una consecuencia de una concentración más intensa en otros asuntos.

Adele, la mujer de G, no tenía una educación formal muy grande ni pretensiones intelectuales. Su estrecha relación y posterior matrimonio no fueron muy del agrado ni de los padres ni del hermano de G. (Para más detalles, véase el capítulo 3, epígrafe *1938*). En una carta a su madre (14 de abril de 1953) G dice, «Adele es por naturaleza absolutamente inofensiva y de buen corazón, pero no cabe duda de que tiene un talante nervioso que se ha visto muy agravado por sus experiencias (en especial, la educación excesivamente severa recibida en casa y su primer matrimonio)». G confió desde luego plenamente en Adele y ella atendió a las necesidades diarias de G de modo pleno y satisfactorio. Es muy probable que el matrimonio se ajustara a los deseos de G de concentrarse en el trabajo teórico y de separar tanto como fuera posible éste de otros aspectos de su vida.

Una consecuencia racional de la decisión de dedicarse al trabajo teórico fundamental es reducir, tanto como sea posible, la atención

a otras actividades y eliminar, en lo que respecta a las necesidades de la vida diaria, todas las complejidades evitables. El comportarse de forma tan absolutamente racional como marca esta línea, como G trata de hacer, tiene el riesgo potencial de entrar en conflicto con el criterio holístico de racionalidad en términos de una vida equilibrada en la que no cabe ningún tipo de fanatismo. Pero este conflicto potencial parece apuntar a una ambigüedad intrínseca en el concepto de racionalidad.

Para compensar la excesiva energía dedicada al trabajo teórico, el modo más simple y menos costoso de atender a los asuntos diarios parece que es cultivar y seguir una rutina que se adecúe a alguna pauta interiorizada y familiar. En conjunto, la vida doméstica de G tiene todo el aspecto de la de una familia burguesa, con sus preocupaciones típicas por la casa y el jardín, el alimento y la digestión, el servicio doméstico, las cuentas semanales, las vacaciones de verano, las familias y parientes (de G y de Adele), los nacimientos y aniversarios, el cine, la radio y más tarde la televisión, el descanso dominical, etc.

Más excepcionales resultan sus limitados contactos sociales, la falta de hijos, la gran atención dedicada a la salud de G, el que no condujera un coche, y lo modesto que era en lo que respecta a sus títulos y reconocimientos oficiales. Tampoco es muy típica su actitud hacia el dinero, el gasto y las posesiones materiales, y concuerda perfectamente con sus propias prioridades. Cuadra con su afirmación de que el dinero no es el único problema ni «tampoco el más importante» (carta de 25 de marzo de 1953). Gasta poco en sí mismo, pero no porque se limitara a satisfacer las necesidades básicas, sino porque, por poner un ejemplo, no sentía «ninguna necesidad de viajar» y el «comprar libros tendría poco sentido, toda vez que todos los que me interesan puedo conseguirlos más fácil y rápidamente en las bibliotecas» (carta de 14 de abril de 1953). Por lo demás, su decisión de dejar, junto con las demás pertenencias, sus artículos a Adele (que no sabía mucho de semejantes cosas) parece indicar que no estaba precisamente preocupado por el trato que se diera a su obra no publicada.

No tiene nada de extraño que un creador de ideas teóricas novedosas sea al propio tiempo una persona corriente y anticuada en lo que respecta a sus actividades diarias. Una yuxtaposición más chocante entre lo nuevo y lo viejo la constituye la preferencia y aptitud de G para obtener ideas originales con las que iluminar enfoques y

cuestiones perennes adentrándose más profundamente en ideas y conceptos tradicionales, que suelen considerarse anticuados sobre la base de respuestas menos cautelosas a exageraciones pasadas. Entre los ejemplos figuran el sentido de la metafísica, el recurso a la intuición, el concepto de verdad matemática (en particular, aritmética), el concepto de tiempo, la naturaleza de la lógica, el concepto de concepto, etc. El énfasis en la precisión no excluye para él lo que tiene un contenido intuitivo y rico.

La originalidad y capacidad de precisión de G van acompañadas de una inclinación a la cautela y a la reserva, cosas que pueden verse ambas como formas de rehuir las complejidades de las relaciones humanas (en especial, las controversias). Esto no quita para haberse permitido excepciones en casos de malinterpretaciones importantes, bien para criticar por omisiones notables, bien para defender incluso su propia obra en público cuando le parecía que alguna de sus importantes ideas publicadas había sido tergiversada sin intención y que se podían corregir los errores de una forma del todo clara y convincente. Como es bien sabido, generalmente no publicó aquellas de sus ideas que resultan controvertidas o difíciles de transmitir por completo. Probablemente, esto tenga algo que ver con su sensación de que las críticas de sus puntos de vista están abocadas a plantearse a un nivel y en un vocabulario con el que él no congenia, debido especialmente a que lo que él llama los «prejuicios de la época» dificultarían la comprensión de alguna de sus ideas. Por lo demás, parece ser especialmente sensible a la crítica, tendencia ésta que está ligada sin duda al hecho de ser una «persona reservada». (Por ejemplo, E. Köhler habló con Adele después de la muerte de G y ésta le dijo que G, en el lecho de muerte, le había recomendado que rehuyera a periodistas y biógrafos.)

El concepto de consistencia tiene un sentido preciso cuando se aplica a sistemas formales. En lo que se refiere a las creencias, acciones, palabras y actitudes de una persona, el concepto correspondiente es mucho más complejo. Hay creencias más firmes y más débiles, la autoconciencia de las inconsistencias varía ampliamente de una situación a otra, de un individuo a otro, etc. En la mayoría de los casos, G es consciente de más conexiones lógicas que la mayor parte de la gente, y es también más coherentemente racional en el sentido concreto de que se preocupa más que los demás de buscar razones por doquier. En filosofía distingue la consistencia de la verdad y critica la obra de Kant sobre la base de que es consistente pero

dedica una atención insuficiente a la verdad. Al decir esto es posible que G esté pensando en la insatisfacción que le produce la ambigua postura kantiana a propósito de la religión, la separación que establece entre la objetividad fenoménica y el Ding-an-sich transcendente, y su inadecuada filosofía de la aritmética, basada en una indebidamente limitada noción de intuición.

Esta primera parte del libro, ocupada de alguno de los hechos relativos a G, tiene cuatro capítulos. Comienza con una consideración de la vida de G desde la perspectiva de su dedicación al trabajo teórico fundamental. Con el fin de lograr un enfoque más concreto, cito y analizo tres documentos relevantes para su vida y obra. También se incluye una sección que constituye una tentativa preliminar de comparar a G con Einstein y de investigar algunos aspectos de la relación entre ellos. El capítulo siguiente reproduce un breve resumen de la vida y la obra de G, tal como él me lo transmitió en 1976, resumen que va acompañado de una consideración de su relación con el Círculo de Viena (que echa mano de algunos recuerdos de Carnap), un análisis del programa hilbertiano que condujo a la respuesta de G y una serie de comparaciones entre G y Wittgenstein. Los dos capítulos restantes ofrecen una perspectiva cronológica más detallada, en la que el año 1940 figura como línea divisoria entre la vida en Europa Central y los años de Princeton.

Aparte de breves visitas (especialmente cinco meses más o menos de 1939 a Notre Dame, y las vacaciones de verano de las décadas de 1940 y 1950), G pasó su vida en Brünn (1906-1924, más las vacaciones de 1924-29), Viena (desde el otoño de 1924 hasta enero de 1940, con tres visitas a Princeton y algunos periodos en el sanatorio), y Princeton (1940-1978, casi 38 años). G se convirtió en ciudadano austríaco en 1929 (el 6 de julio) y en ciudadano americano en 1948 (el 2 de abril, junto con Adele). Hablando en líneas generales, completó su educación en la primavera de 1929, se dedicó a la lógica matemática desde el verano de 1929 hasta aproximadamente finales de 1942, y se ocupó ampliamente de filosofía (incluyendo aquí su trabajo sobre la teoría de la relatividad, desarrollado probablemente entre 1946 y comienzos de 1951) durante los treinta y cinco años restantes.

He consultado algunos diccionarios biográficos en los que he encontrado alguna información de interés derivada —presumo— de formularios cumplimentados por el propio G antes de 1970. Uno de los aspectos interesantes lo constituye no tanto el contenido

cuanto la selección y formulación que G hace del material. Así por ejemplo, en las tres entradas que consulté, daba como fechas de su pertenencia al I.A.S. como miembro las de 1933, 1935, 1938-1953 (y como profesor, 1953-). Como pieza de información tiene especial interés el item dedicado a sus aficiones, donde aparece reseñada la historia antigua. Yo tengo también un vago recuerdo de estas aficiones que me describió una o dos veces. En cuanto a sus empleos profesionales, el otro único item que figura, aparte de su relación con el I.A.S., es el de Dozent de la Universidad de Viena entre 1933-1938.

Lo que encierra un mayor interés es el modo en que G selecciona para su inclusión el trabajo anterior a 1970. En *International Who's Who 1971-72,* incluyó bajo el epígrafe de publicaciones solamente tres items: Über formal unentscheidbare Sätze 31, la consistencia de la hipótesis del continuo 40, universos rotatorios en teoría general de la relatividad 50. En *Who's Who 1970-71,* entre las pocas revistas en las que había colaborado, citaba *Dialectica* (en relación con el artículo sobre Bernays).

En *World's Who's Who in Science* describía así sus principales aportaciones:

> He logrado una prueba de completud de la lógica de predicados, un modo de hallar, para un sistema matemático formalizado de axiomas, una cuestión de análisis Diofántico indecible en dicho sistema; una demostración de que la consistencia del sistema no puede probarse en el mismo sistema; una prueba de la consistencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo de Cantor con los axiomas de la teoría de conjuntos aceptados normalmente; la construcción de universos rotatorios sobre la base de la teoría einsteniana de la gravitación.

Para lograr una idea más completa de las aportaciones de G, hay que complementar la descripción anterior con el añadido de sus publicaciones filosóficas y, sobre todo, de su trabajo no publicado. G opta por incluir sólo aquellos aspectos de su obra que están del todo acabados y que gozan de aceptación general. Yo creo que esto no significa que, en su fuero interno, no considerara importante su obra filosófica. Por lo que a sus opiniones filosóficas se refiere, tuvo una ocasión (hacia 1975) de responder a un cuestionario (véase *GQ*) sobre dónde hallar interpretaciones publicadas de las mismas. En respuesta, incluyó su contribución a mi *MP* (1974, pp. 8-12, 84-

86, 186, 189-190, y 324-326, unas 10 páginas en total) y unas 6 páginas de su artículo sobre Cantor (1947 y 1963, BP, pp. 262-265, 270-272). He leído estas 16 páginas muchas veces, y estoy convencido de que estas concisas afirmaciones poseen un contenido extraordinariamente rico, aunque a la vez preciso, por cuanto que bosquejan con toda exactitud algunos aspectos básicos del mundo tal como él los ve.

Pero, probablemente, lo que mayor importancia filosófica encierre tal vez sea su obra no publicada. Mi reconstrucción de las conversaciones mantenidas con él (que será incluida en *CG*) pretende ser una pequeña aportación tendente a hacer más asequibles aquellas de sus ideas no expuestas en publicaciones. La importante tarea de seleccionar de entre su vasto Nachlass lo que ha de publicarse será sin duda una tarea ardua y costosa.

Especial interés encierra una hoja que no tiene fecha, en la que G resumió su obra no publicada realizada de 1940 en adelante. Parece probable que la lista haya sido confeccionada hacia 1970, por lo que es de suponer que incluya la parte principal de la obra no publicada de G. En palabras del propio G, la lista es más o menos la siguiente:

1. Unas mil páginas taquigráficas de 6 × 8 pulgadas llenas de notas filosóficas claramente escritas (= aserciones filosóficas).
2. Dos artículos filosóficos casi listos para la imprenta. [Su artículo sobre la relatividad y la filosofía kantiana y su artículo sobre sintaxis y matemáticas.]
3. Varios miles de páginas de extractos filosóficos y de [notas sobre] literatura.
4. Las *demostraciones* claramente escritas de mis [sus] resultados cosmológicos.
5. Unas seiscientas páginas claramente escritas de resultados, problemas y conjeturas lógicos y de teoría de conjuntos (en cierto modo *superados* por recientes desarrollos).
6. Diversas notas sobre intuicionismo y otras cuestiones fundamentales.

[El primer ítem es seguramente el más importante para la filosofía. También aparecen mencionados en la hoja su prueba ontológica, cinco obras matemáticas menores, su prueba de la consistencia general del axioma de elección, y su nueva versión del artículo de 1958 con tres notas añadidas. En *CG* se ofrece un análisis más pormenorizado de esta hoja.]

De la consideración hecha por G de sus resultados y manuscritos se desprende que fue extraordinariamente parco en la publicación de su obra (especialmente a partir de 1950). También declinó diversas invitaciones a considerar la publicación de sus obras completas, alegando que las importantes eran todas fáciles de encontrar. Mas esto no indica, a mi modo de ver, que considerara poco importante su obra no publicada, sino más bien que consideraba que la mayoría de ella no estaba lo suficientemente acabada para su publicación.

En algún momento (probablemente en 1970) habló con Dana Scott de su deseo de que algunos de sus trabajos se publicaran póstumamente e incluso le pidió a Scott que preparara copias mecanografiadas de algunos de ellos. También a mí me dijo en 1976 que mis notas «Some facts about Kurt Gödel» podían publicarse después de su muerte. Parece, pues, que prefería que una gran parte de sus escritos se publicaran póstumamente mejor que durante su vida. Estoy seguro de que la razón es que no quería verse perturbado por la crítica y la controversia.

Capítulo 1

UNA VIDA DEDICADA AL TRABAJO DE FUNDAMENTACION TEORICA

La de G fue una vida (1906-1978) dedicada, tanto como es humanamente posible, y con éxito, a la realización de un trabajo de fundamentación teórica. Comparada con la de otros que han realizado un trabajo de este tipo que haya tenido interés para él, la vida de G se puede decir que ha estado centrada de forma aún más excluyente en este único tipo de trabajo. Persiguió de forma más consistente lo importante y publicó relativamente poco. Se dedicó a muy pocas otras actividades, mientras que, por ejemplo, Platón se dedicó a la política activa, Newton fue director de la casa de la moneda, Leibniz fue también, entre otras muchas cosas, diplomático e historiador, Kant, bibliotecario y rector, y Russell y Einstein desplegaron su actividad en varias direcciones. A diferencia de Kant o de Husserl, G tampoco se prodigó demasiado impartiendo clases o conferencias.

En la realización de cosas importantes, desempeñan algún papel el talento, las decisiones y las circunstancias. De entre quienes se dedican al trabajo de fundamentación teórica, unos muestran, de jóvenes, dotes excepcionales en una dirección concreta, en tanto que otros parecen tener habilidad en varias direcciones. G parece pertenecer a la segunda categoría: cuando estaba en el colegio, la gente que lo conocía veía claramente que dominaba una amplia gama de temas y que estaba llamado a realizar un trabajo importante en uno u otro campo. Parece que su deseo era realizar progresos

conceptuales importantes que fueran a un tiempo concluyentes y no controvertidos. Tales progresos no son, como es natural, frecuentes. Hasta 1939, fue lo suficientemente afortunado como para lograr resultados que cumplen ambos requisitos de forma satisfactoria, incluso para él. De 1940 en adelante parece haber habido una lucha constante entre ambos requisitos en su línea de trabajo. En 1943 interrumpió su muy prometedor trabajo de lógica y a partir de entonces dedicó mucha energía a hacer filosofía (en el sentido conocido del término), pero es poco lo completado (conforme a su ideal) y menos aún lo publicado.

Hablando de forma mecánica y engañosa, se pueden distinguir distintas etapas en la vida de trabajo intelectual de G. Los primeros 23 años (1906-1929) estuvieron dedicados al aprendizaje y a la preparación. A estos siguieron 14 años (1929-1943) de intensa y sumamente productiva investigación en el campo de la lógica matemática. Los siguientes años son testigos de un profundo interés por la filosofía que llegó a dominar sus actividades intelectuales. No sólo se interesó por la filosofía de la matemática, sino que además tomó a ésta como fundamental para la filosofía. Sus artículos sobre Russell (1944) y Cantor (1947) pertenecen a esta área, y calificó de «digresión» su trabajo sobre teoría de la relatividad (y también sobre su relación con la filosofía kantiana), realizado probablemente entre finales de 1946 y comienzos de 1951. Durante los ocho años siguientes la filosofía de la matemática ocupó un lugar central: la Gibbs Lecture, el ensayo sobre Carnap, y el ensayo sobre la constructividad. En 1959 comenzó a estudiar a Husserl, probablemente tratando de hallar un fundamento más profundo del conocimiento humano en la vida cotidiana. Fue seguramente en este momento cuando «se dio cuenta de que la filosofía requiere un método distinto del de la ciencia». Prescindiendo de pormenores, se puede distinguir un periodo de dedicación a una filosofía centrada en la ciencia (1943-1958) y otro a una filosofía más autónoma (1959-1978). No obstante, es evidente que muchas de sus tesis se mantuvieron inalterables no sólo desde 1943 sino incluso desde 1925, de acuerdo con su propia relación, así como con otros informes.

Con vistas a lograr una perspectiva más completa de la vida de G, me gustaría considerar tres documentos: una carta de su hermano Rudolf sobre la juventud de G (de 29 de abril de 1985), las respuestas, no enviadas, dadas por G a un cuestionario (1975), y una evaluación mía (1972).

1.1. Carta del Dr. Rudolf Gödel (RG)

Esta es una respuesta a una pregunta mía. Una traducción de la misma se ofrece, descompuesta en trozos, en el análisis cronológico de más adelante bajo los años 1911, 1914, 1916, 1920, 1924 y 1945.

Wir (mein Bruder und ich) lebten mit unseren Eltern in Brünn in einer Villa mit schönem Garten.

Es war ein harmonisches Familien-Leben, ich verstan mich mit meinem Bruder sehr gut und hatten wenige Freunde, ruhige Spiele-Baukasten, Eisenbahn, im 1. Weltkrieg natürlich auch mit Zinnsoldaten.

Mein Bruder war ein fröliches Kind, hatte allerdings mit edwa 5 Jahreneine leichtee Angst Neurose, die spatter volkommen zurück ging. Et war ein ausgezeichneter Schüler der anfangs an Sprachen, später an Geschitche und noch später an Matematik interessiert war. Auf lateinischen Schularbeiten hatte er *immer* die beste Note. In Mathematik war er mit 16-17 Jahren seinem Kollegen weit voraus und beherrschte schon den Stoff der Universität.

Mit seiner Mutter hat er sich bes. gut verstanden, sie spielte ihm oft am klavier seine lieblings-Melodien vor (leichte Musik). Wenn ich mit meinem Eltern spazieren ging, blib er oft lieber mit eine, Buch zuhause.

Im Alter von etwa 8 Jahren hatte mein Bruder einem schweren Gelenk-Rheumatismus mit hohem Fieber und seither war er etwas hypocondrsch und bildete sich ein, einen Herzfehler zu haben, was aber medizinisch nie nachgewiesen wurde.

Später, in Princeton, hatte er ein Ulcus duodeni mit einer schweren Blutung. Sether lebte er *so streng* Diät, dass er dauernd an Gewicht verlor und unterernährt war.

Im Alter von etwa 10 Jahren spielte er gerne Schach und war im Spiel seht ergeizig und sehr traurig oder ärgerlich wenn er verloren hat, was nicht oft der Fall war.

An unserem schönen Garten hatte er nicht viel Interesse, während ich dort gerne arbeitete.

Im Alter 18 Jahren ging er zum Studium and die Univ. Wien wo ich schon seit 4 Jahren Medizin studierte, wir wohnten als Studenten beisammen, jeder in seinem Zimmer, waren aber nicht viel beisammen, da er an die Univ. und ich ans Krankenhaus ging, er sprach mit mir nur selten über seinem Beruf. Ich erfuhr spät, als er schon in Princeton wat, durch Bekannte (!), dass er in seinem Fach ein bedeutender Mann war.

Unsere Eltern kamen uns in Wien oft besuchen und wir gingen dann oft ins Theater wofürmein Bruder grossees Interesse hatte.

Warum mein Bruder nach dem 2. Weltkrieg nie mehr nach Wien zu Besuch gekommen ist, habe ich nicht verstanden. Er gab als Ursache an dass er in Wien wielleicht nicht die entsprechende Diät einhalten könnte (?).

Er hat aber seine Mutter und mich mehrmals nach Princeton eingeladen und wir haben mit ihm und seiner Frau viele glückliche Stunden verbracht.

De esta carta se desprende que G creció en el seno de una familia feliz y muy rica. Su estrecho contacto con su madre se mantuvo hasta la muerte de ella en 1966. En los últimos años entabló estrechas relaciones con algunos de sus colegas seniors, especialmente con Hahn (muerto en 1934), Schlick (muerto en 1936), Einstein (muerto en 1955), y Bernays (muerto en 1977). De entre sus contemporáneos (todos algo más mayores que él) son conocidos sus contactos con M. Natkin, H. Feigl, K. Menger, J. v. Neumann, y O. Morgenstern. Durante los últimos 25 años de su vida, se sintió muy a gusto con media docena de lógicos 15 o 20 años más jóvenes que él. Todos estos contactos personales tienen su base en los intereses intelectuales compartidos. Por lo poco que sé, su matrimonio fue en conjunto feliz. Su mujer no era una intelectual pero, por lo que parece, le ayudó también mucho en su trabajo haciendo posible que se concentrara en él; ayuda ésta que yo creo que es mayor que la que normalmente se prestan uno a otro los miembros de un matrimonio. Su matrimonio se asemeja al segundo de los de Einstein (más que al primero). [Einstein provenía también de una familia armoniosa y feliz (Pais, p. 36).]

No cabe duda de que esta familia, rica y feliz, contribuyó a reforzar la confianza que G tenía en sí mismo y a darle una sensación de seguridad más firme. No hubo de dedicar mucho tiempo a ganarse la vida en la primera etapa de su carrera, que es el momento en que normalmente es preciso producir resultados y darse a conocer. Einstein, por ejemplo, tuvo que economizar mientras estudiaba y que ingeniárselas para ganarse la vida tan pronto como acabó. La otra cara de la moneda la constituía el riesgo de convertirse en un niño mimado, de incubar una tendencia a esperar que las cosas sean resueltas por otros y a restringir los contactos personales a aquellos de calidad comparable a lo que había sido acostumbrado en la familia feliz.

La carrera escolar de G muestra las respuestas normales en un

niño extraordinariamente dotado y metódico. Su cambio de interés de los lenguajes a la historia y luego de ésta a las matemáticas es natural en alguien que poseía una omnímoda capacidad intelectual. El atractivo de un tema escolar viene determinado por la combinación de su interés intrínseco (en toda su riqueza) y de aquello que es susceptible de ser aprendido y bien comprendido en la etapa escolar. Como G era capaz de absorber todo lo que se le enseñaba y más, la sucesión de temas por los que se interesó parece caer bajo un esquema más o menos previsible. Así por ejemplo, la ciencia o la teología raramente pueden enseñarse en las escuelas de un modo tal que produzca en la mente de un alumno brillante la sensación de entender realmente el asunto.

Hay otra cuestión obvia: La capacidad de G estaba muy por encima del maximum de exigencias de la escuela. Esto se desprende de la cantidad adicional de matemáticas que aprendió por sí mismo. Este gran superavit sobre lo exigido parece ser una experiencia común a todos los llamados a realizar, andando el tiempo, un trabajo teórico importante. La gente difiere en el modo de emplear este superávit. Einstein también contaba con él, pero su decisión de emplearlo para estudiar física y matemáticas fue más excepcional que la de G. Aparte de la famosa alegría que le produjo un compás de bolsillo a los 4 o 5 años, su tío (paterno) Jacob le planteaba problemas matemáticos a la edad de 9 años; y entre los 10 y los 14 Max Talmud le introdujo en un buen material de lectura sobre física y dedicó unas cuantas horas a la semana a discutir con él de ciencia y filosofía (País, pp. 37-38). Que yo sepa, G no tuvo contactos extracurriculares comparables.

No deja de ser curioso que el hermano de G tuviera que enterarse de la importancia de éste de un modo tan indirecto. En cierta ocasión me contaron que la mujer de G creía que el hermano de éste había logrado más éxito que él. Es evidente que G apenas hablaba con su familia de su trabajo o de su profesión. Hablando más en general, a G le gustaba responder a cuestiones (y responderlas bien), pero tendía a restringir sus respuestas a lo que a él le parecía directamente relevante. A diferencia de la mayoría de la gente, raramente entraba en temas afines de los que cupiera esperar que fueran también de interés para el entrevistador. Una razón para esta renuencia a ampliar los temas tal vez esté en el hecho de que sabía mucho y tenía muchas ideas y de que no quería decir cosas que no interesaran. Por la limitada experiencia que yo tengo, sólo suminis-

traba espontáneamente información en casos excepcionales, como por ejemplo, para informar sobre su estado de salud, cuando le parecía que se lo tergiversaba o, con menos frecuencia, cuando estaba interesado en educar a alguien.

Un factor importante en la vida y la obra de G lo constituyó su débil constitución y su salud relativámente precaria. Tanto él como Kant eran débiles y ligeramente hipocondríacos. Ambos dedicaron mucha atención a su salud, pero, aparentemente, Kant tuvo más éxito, debido probablemente a que era más «racional». El hermano de G destacaba lo excesivamente astringente de su dieta y sus malos efectos. Es de todos sabido que G no obedecía las prescripciones de los médicos ni siquiera en aquellas situaciones en las que la mayoría de la gente lo haría. Alguna vez admitió ser un paciente difícil. En su vida diaria, especialmente en materia de alimentación, dependía casi enteramente de su mujer, al menos en sus últimos años. En una ocasión en que su mujer no estaba, me contó que cocinaba una vez cada tantos días. Durante el último medio año de su vida su esposa estuvo la mayor parte del tiempo fuera de casa a causa de su salud. Esto repercutió negativamente en él y cuando los amigos habían arreglado las cosas para que fueran enfermeras a cuidarle, no les abrió la puerta. Está ampliamente extendida la idea de que era paranoide y de que estaba bajo la continua sospecha de que la comida estaba envenenada. Su mujer regresó a casa antes de la Navidad de 1977 y le convenció para que ingresara en el hospital, donde murió el 14 de enero de 1978. Murió a causa de «malnutrición e inanición» producidas por «perturbación mental», según el certificado de defunción (registro del palacio de justicia del Condado de Mercer, Trenton).

Al igual que Kant, G no viajó mucho. Solo viajó cuando tuvo que hacerlo, y el viajar, y sobre todo salir de casa, parece que le atacaba a los nervios, como se desprende del hecho de que tanto en 1934 como en 1935 se sintió mal a su regreso a Viena desde Princeton. Desde su llegada a Princeton en marzo de 1940, nunca salió de allí más que para viajes muy cortos y en las vacaciones de verano (una o dos veces en Maine pero la mayoría de ellas en New Jersey). Su hermano se pregunta por qué G no volvió nunca de nuevo a Viena. La renuencia de G a viajar parece haber sido la razón decisiva. (Declinó un doctorado honorario de la Universidad de Cambridge por esta razón.)

La relación de G con Viena y con su universidad es compleja.

En 1939 fue hallado, para su sorpresa, apto para el servicio militar y solicitó pero no obtuvo (hasta mucho después) el cambio al puesto de Dozent. Sin embargo, al parecer, compró (o alquiló) un apartamento en Viena y estuvo realizando trabajo para dicho puesto hasta fecha tan tardía como noviembre de 1939. Parece que hasta ese momento intentó todavía quedarse en Viena. Andando el tiempo declinaría en más de una ocasión distinciones de Viena.

Es evidente que a G no le resultó desagradable vivir en Princeton y en América. Sin embargo es mucho más conocido por la obra que realizó en Viena que por la de Princeton. Si las circunstancias lo hubieran permitido, no cabe duda de que hubiera preferido vivir y realizar toda su obra, al igual que Kant, en un solo lugar o por lo menos en una región cultural más o menos homogénea. Sus ideas filosóficas habrían encontrado probablemente más simpatía y aprobación en el continente europeo y, como consecuencia de ello, se habría sentido estimulado a publicar más. Y, desde otra consideración, si hubiera tenido sólo un puesto docente, especialmente si hubiera sido para enseñar filosofía, es probable que sus ideas filosóficas hubieran sido más ampliamente difundidas a través de sus alumnos.

1.2. **El cuestionario de Grandjean** (GQ)

Burke D. Grandjean diseñó en 1974 un cuestionario especial para G. Escribió a G el 16 de julio y el 19 de septiembre de 1974, y también el 12 de febrero, 2 de mayo, 15 de septiembre y 2 de diciembre de 1975. También habló con él por teléfono el 24 de febrero de 1975. Entre los papeles de G hay una carta dirigida a Grandjean, con fecha de 19 de agosto de 1975, que responde sólo a algunas cuestiones. Pero la respuesta no fue enviada. También hay dos variantes de un conjunto relativamente completo de respuestas escritas a lápiz (y no del todo legibles) a las cuestiones. Trataré de reproducir aquí los tres documentos (contenidos todos ellos en la carpeta 01/55 del Nachlass). Hay que presumir que tales respuestas son de 1975.

1.2.1. *El formulario con las respuestas*

Información intelectual y biográfica: Kurt Gödel.

1. Hágame un bosquejo de su formación educativa. Según mis informes, asistió a la escuela primaria en Brünn (ahora Brno, Checoslovaquia), obtuvo el grado de ingeniero en una escuela técnica de Brünn, y en 1924 inició sus estudios de matemáticas en la universidad de Viena, donde obtuvo el grado de Ph.D. en 1930. ¿Cómo es de completa y exacta esta información?

G tachó la cláusula «obtuvo... escuela técnica de Brünn», escribió al margen «incorrecto», y abrió un espacio entre «estudios» y «de matemáticas» para introducir «primero de física durante 1 o 2 años».

2. (a) ¿En qué momento se inicia —que usted recuerde— su interés por las matemáticas?

«A los 14 años.»

(b) ¿Destacaría alguna cosa que haya influido especialmente en el desarrollo de sus intereses?

«La introducción al cálculo incluida en [la] colección "Görschen".»

3. ¿Cuándo estudió por primera vez *Principia Mathematica*?

«En 1929.»

4. (a) ¿Cuándo llegó a interesarse —que usted recuerde— por el problema, central para sus artículos de 1930 y 1931, de la completud de la lógica y las matemáticas?

«En 1928.»

(b) ¿Destacaría alguna influencia como especialmente relevante en este aspecto?

«La introducción a la lógica matemática de Hilbert-Ackermann y las clases de Carnap sobre metalógica.»

5. ¿Cuándo estudió por primera vez, si es que lo hizo, alguna de las obras de los siguientes autores?:

(a) Ludwig Boltzmann. «Los artículos fil[osóficos] en 1960.»

(b) Jan Brouwer. «En 1940.»

(c) Paul Finsler. «En 1932» [seguido de unas palabras borrosas, probablemente para señalar que la obra no tiene interés para él].

(d) Immanuel Kant. «En 1922.»

(e) Karl Kraus. «En 1960.»

(f) Fritz Mauthner. «Nunca.»

(g) Jules Richard. «Nunca.»

(h) Ludwig Wittgenstein. «En 1927 (nunca toda su obra).»

6. ¿Cuánta importancia atribuye, si es que les atribuye alguna, a cada uno de los autores de la lista anterior en el desarrollo de sus intereses?

«El único que ha sido importante es Kant.»

7. Su nombre se menciona frecuentemente asociado al «Círculo de Viena», que empezó a reunirse en 1924 e incluía a Rudolf Carnap, Hans Hahn, Otto Neurath, Moritz Schlick y otros.

(a) ¿Cuándo empezó su relación con este grupo?

«En 1926.»

(b) ¿Cómo fue de estrecha esa relación?

«Durante 1926-28 celebré discusiones con algunos de los miembros más jóvenes, pero la mayoría de las veces (con gran frecuencia) adopté una postura no-positivista. Asistí también a los seminarios.»

(c) ¿Cree que este grupo o alguno de sus miembros influyó en el desarrollo de sus intereses intelectuales?

«Sí, este grupo despertó mi interés por los fundamentos pero mis ideas acerca de los mismos difieren fund[amentalmente] (sust[ancialmente]) de las suyas.»

8. Sus inclinaciones filosóficas han sido descritas por alguno como «realismo matemático», debido a que los conjuntos y teoremas matemáticos se considera que describen *objetos* de alguna clase.

(a) ¿Cómo es de exacta esta caracterización?

«Correcta.»

(b) En concreto, ¿describe bien su punto de vista *de la década de 1920 y de los primeros años de 1930* en tanto que distinto de su postura posterior?

«Fue [ha sido] mi postura desde 1925 antes de [seguido de un par de palabras seguramente para indicar "entrar en contacto con el Círculo"].»

(c) ¿Hay alguna cosa que haya influido de un modo especial en el desarrollo de su filosofía?

«Las clases introductorias de filosofía de Gompertz y las [clases] matemáticas de Furtwängler.»

9. ¿Hay alguna fuente publicada, escrita por usted o por otro autor, que le parezca especialmente adecuada como descripción de su punto de vista filosófico?

«El libro de Wang, el artículo sobre el problema del continuo, y el artículo sobre Russell.»

10. (a) ¿Cuándo y dónde nacieron sus padres?

[dejada en blanco]

(b) ¿Cuál fue su lengua nativa?

«El alemán.»

11. (a) ¿Cuál era la ocupación de su padre durante su infancia?

«Era gerente de una fábrica de paños.»

(b) ¿Cuál era la ocupación de su madre (si trabajaba)?

«No trabajaba.»

12. ¿Cuál es el nivel educativo más alto al que llegó cada uno de sus padres?

«Mi padre, la escuela técnica. Un nivel equivalente con cursos en un college.»

13. (a) ¿Cuál era la religión de sus padres?

«Mi padre era católico viejo, mi madre luterana.»

(b) ¿Cuál es su religión?

«Soy luterano baptista (pero no soy miembro de ninguna cong. rel.). Mi creencia no es panteísta sino *teísta,* en la línea de Leibniz más que de Spinoza.»

14. (a) ¿Cuántos otros hijos tuvieron sus padres?

«1.»

(b) ¿En qué edad nació cada uno?

«En 1902.»

(c) ¿Cuál es el nivel educativo más alto al que llegaron?

«Médico (espec. rayos X).»

15. (a) ¿Cómo caracterizaría la situación financiera de su familia durante su infancia: de muy pobre, pobre, media, media-alta, rica?

«Tirando a rica.»

(b) ¿Cuánto afectó a su familia la I Guerra mundial y la inflación posterior?

«No mucho.»

16. (a) ¿En qué medida afectó a usted y a su familia el movimiento nacionalista checo para la independencia del imperio austro-húngaro?

«Emigramos a Austria en 1929 (después de la muerte de mi padre).»

(b) ¿Hasta qué punto usted y su familia fueron conscientes del antisemitismo o se vieron afectados por él durante el periodo de 1910 a 1935?

«No nos afectó.»

17. ¿Cuánto contacto habían tenido usted y su familia con la vida cultural e intelectual de Viena antes de su ingreso en la universidad de Viena?

«Sólo a través del periódico *Neue freie Presse.*»

Muy agradecido por el tiempo y la atención que ha dedicado a estas cuestiones, Profesor Gödel. Muchas gracias. Atentamente (firmado),

Burke D. Grandjean

1.2.2. *Respuesta alternativa o suplementaria*

Muy señor mío,

Lamento no haber tenido tiempo para una entrevista. Además, no me he encontrado bien últimamente. Adjunto le envío algunas respuestas a sus preguntas (menos a aquellas que son demasiado personales o difíciles de responder). Siguen en parte el formulario que usted me envió.

2a. A los 14 años.
2b. Los libros de texto de cálculo estándar.
3. En 1929.
4a. En 1928.
4b. La Introducción de Hilbert-Ackermann.
Las clases de Carnap.
5. (a) hacia 1960 (las obras filosóficas) (b) En 1940.
(c) Sólo 2 artículos, en 1932 y posteriormente.
(d) En 1922 (e) hacia 1960 (f) (g) nunca
(h) hacia 1927 sólo muy superficialmente.

En relación con 6 me gustaría decir que el único que ha tenido alguna infl. sobre mi pensamiento fil. en gen. es Kant y que entré en contacto con él hacia 1922, que conozco a Wittgenstein muy superficialmente, y que sólo he leído dos artículos de Finsler (en el 32 o después); por último, que el mayor infl. fil. sobre mí proviene de Leibnitz a quién estudié entre 1943-46.

7. (a) En 1926.

(b) Entre 1926-28 asistencia a reuniones y disc. frecuentes con algunos de los miembros más jóvenes. A partir de 1930 la relación se fue haciendo cada vez más débil. Hablando en general, sólo suscribí algunas de sus tesis. Así por ejemplo, nunca compartí la idea de que la matemática sea sintaxis del leng. Con el tiempo me he ido apartando cada vez más de sus ideas.

(c) Sí, despertaron mi interés por los fund. de la mat.

8. (a) Exacta.
(b) He mantenido este punto de vista desde 1925.
(c) Heinrich Gomp. Prof. de Fil. de la Universidad de Viena.

Las tesis de Wittg. sobre fil. de la mat. no han influido en mi obra ni el interés del Círculo de Viena por este tema tuvo su origen con Wittg. [sino que se remonta al Prof. Hans Hahn].

1.2.3. *La carta*

Por último, la carta escrita por G en agosto de 1975 pero que no firmó ni envió es la siguiente.

19 de agosto de 1975
Mr. Burke D. Grandjean
Departamento de Sociología
Universidad de Texas
Austin, TX 78712

Estimado Mr. Grandjean:

Respondiendo a sus preguntas quisiera decir en primer lugar que *no* considero mi trabajo como una «faceta de la atmósfera intelectual de los primeros años del siglo xx», sino más bien lo contrario. Es cierto que mi interés por los fundamentos de la matemática surgió a través del contacto con el «Círculo de Viena», pero las consecuencias filosóficas de mis resultados, lo mismo que los principios heurísticos que llevan a ellos son cualquier cosa menos positivistas o empiristas. Puede ver lo que digo en el reciente libro de Hao Wang *De las matemáticas a la filosofía* en los pasajes citados en el Prefacio. Vea también mi artículo «¿Cuál es el problema del continuo de Cantor?», incluido en *Philosophy of Mathematics,* editado por Benacerraf y Putnam en 1964, en especial las páginas 262-265 y 270-272.

He sido un realista conceptual y matemático desde 1925 aproximadamente. Nunca he mantenido la tesis de que la matemática sea sintaxis del lenguaje, sino que por el contrario esta tesis, en cualquiera de sus sentidos razonables, puede ser *refutada* con mis resultados.

Ahí le va un breve resumen biográfico. No he estudiado nunca en Brünn [esto hace referencia a la parte tachada de la pregunta 1 de Grandjean, pero no quiere decir que niegue haber asistido en Brünn a las escuelas primaria y secundaria]. Mi interés por las matemáticas y la filosofía se despertó en la escuela superior en torno a los 15 años. Ninguno de los autores mencionados en la pregunta 5 de su cuestionario, con la única excepción de Kant, ha ejercido un influjo directo en el desarrollo de mis intereses.

Soy descendiente de germano-austríacos, pero tanto mi familia como yo hemos mirado siempre con simpatía a los judíos. Mi familia era de clase media alta. Mi padre trabajó en la industria manufacturera.

Le saluda afectuosamente
Kurt Gödel
KGcdu
Rúbrica

Hay algunas variantes en estos documentos. Así por ejemplo, a la pregunta 2a acerca del comienzo de su interés por las matemáticas, la respuesta era a los 14 años, pero en la carta, la edad consignada en relación con las matemáticas *y la filosofía* son los 15 años. A la pregunta 8c acerca de las influencias sobre el desarrollo de su filosofía, la respuesta de la primera versión incluye al profesor de teoría de números, pero en la segunda, sólo se alude al de filosofía. La inclusión en el primer caso me parece que tiene que ver con la idea de G de que la teoría de números ofrece el elemento de juicio más fuerte en favor de su objetivismo matemático.

Especial interés tienen las referencias a Leibniz y a Wittgenstein añadidas en el segundo documento. Aunque es bien sabido que estudió las obras de Leibniz minuciosamente, el dato de «entre 1943-46» no deja de tener utilidad. La observación acerca de la obra de Wittgenstein responde explícitamente a una pregunta formulada con frecuencia.

Trataré de hacer una descripción del desarrollo intelectual de G. Empezó a sentir interés por las matemáticas en torno a los 14 años y éste se extendió a la filosofía a los 15. Leyó a Kant hacia los 16. En el momento de su entrada en la universidad, a los 18 años, había adquirido ya un buen dominio de diversas lenguas, cierta familiaridad con la historia, el conocimiento de una buena parte de la matemática superior y es de suponer que un grado de comprensión de la ciencia muy por encima de lo normal en este estadio de la educación. No tiene nada de extraño que pensara estudiar física teórica en la universidad. Éste podría ser un modo de combinar su interés por las matemáticas y el que sentía por la filosofía. El cometido de dar una interpretación del misterioso éxito de la física es desde luego central en la filosofía kantiana. En lo que a las cuestiones conceptuales fundamentales concierne, la física parece complementar e incluso contener a las matemáticas.

A juzgar por las fichas de pedido de las bibliotecas, durante sus dos o tres primeros años de estancia en Viena, G solicitó primordialmente libros de física teórica. Sentía una inclinación innegable hacia lo que podríamos llamar los fundamentos teóricos de la física. Así por ejemplo, el 26 de enero de 1925 solicitó los *Fundamentos metafísicos de la ciencia natural* de Kant. Pero, dada la preocupación de G por la meticulosidad, la física adolece de una falta de pulcritud que reclama un desmenuzamiento de las cuestiones conceptuales involucradas, y las matemáticas parecen una opción natural, al menos para una primera aproximación, como forma de dividir en partes la dificultad. Esto es lo que yo creo que quiso decir G al afirmar que su interés por la *precisión* le llevó de la física teórica a las matemáticas.

Hay también otras razones. Durante 1925/26 (al menos) asistió a las clases de Gomperz sobre la historia de la filosofía europea. Hacia esta época se convirtió en un «realista conceptual», posiblemente por influencia de Platón. Desde este punto de vista, parece que es reflexionando sobre las matemáticas como llegamos al núcleo del análisis conceptual, el cual constituía, para G, el centro de la filoso-

fía. También siguió las clases de Furtwängler sobre teoría de números, que constituye el más fuerte elemento de juicio en favor del realismo conceptual así como su aplicación más clara. Por otro lado, en 1927 solicitó muchas veces libros de teoría de números. La dedicación a la teoría de números como especialista dista mucho, sin embargo, del estudio de la filosofía que emplea sus conceptos como un ingrediente importante.

En esta etapa, lo que podría considerarse más bien como un accidente histórico llegó a desempeñar un importante papel. Ocurrió que, en esta época, algunos de los líderes de lo que más tarde había de conocerse como el Círculo de Viena de los positivistas lógicos estaban desarrollando activamente sus novedosas e influyentes ideas precisamente dentro de la comunidad a la que G pertenecía. Dado el interés de G por la filosofía, en 1925 asistió a las clases de Schlick sobre filosofía de la matemática e hizo amistad con los destacados estudiantes Natkin y Feigl, todo ello en 1925. También entabló relación con su profesor de matemáticas Hahn y comenzó a asistir a las reuniones del Círculo de Slick en 1926. Carnap llegó también a Viena en 1926 y en las reuniones celebradas en 1926/27 se discutió detenidamente el *Tractatus* de Wittgenstein.

Por lo que parece, a G no le agradaba demasiado la orientación empirista ni le causaron buena impresión ni el *Tractatus* ni la obra filosófica realizada por los miembros del Círculo. Sin embargo, es indudable que influyó en él lo suficiente como para darse cuenta de que la lógica pudiera ser importante para la filosofía y para ir viendo gradualmente que la lógica prometía ocuparse de los conceptos fundamentales de la matemática de un modo directo. Con todo, no empezó a interesarse intensamente por la lógica hasta 1928. Yo creo que la razón está en la preocupación de G por ocuparse de cuestiones respecto de las cuales cupiera hacer avances concretos. Es probable que haya sido en 1928 cuando adquirió cierta idea del programa de Hilbert así como de la obra de Frege y Russell, y cuando vio que la lógica podía ser *precisa* al tiempo que comprehensiva. Es entonces cuando halló natural dedicarse a explorar la lógica en serio. Este parece ser el sentido en el que el interés de G por la precisión le llevó de las matemáticas a la lógica.

Durante el semestre de invierno de 1928/29, Carnap impartió un curso, «Los fundamentos filosóficos de la aritmética» (incluido en el catálogo de la Universidad de Viena, de dos horas semanales), que es sin duda el curso sobre «metalógica» al que G asistió. Es pro-

bable que hasta comienzos de 1929 G y Carnap no dispusieran de la primera edición de Hilbert-Ackermann (publicada en 1928). Tanto el curso como el libro contemplaban cuestiones de carácter matemático directamente relacionadas con conceptos lógicos básicos. Es probable que haya sido también en esta fecha cuando G conoció la conferencia de Bolonia impartida por Hilbert (en septiembre de 1928), en la que se formulaban explícitamente cuatro problemas fundamentales de teoría de la demostración. La espectacular narración de cómo G resolvió los cuatro problemas en menos de dos años (de 1929 a 1930) es conocida. Más adelante (en la sección 2.3) volveré más detenidamente sobre este punto.

En Viena, además del valioso estímulo intelectual proveniente del Círculo de Schlick, confluyeron también otros factores que fueron positivos para el trabajo de G. Era querido y admirado por muchos de sus profesores y colegas (y, en particular, por los miembros del Círculo de Schlick). Su trabajo fue enseguida objeto de aprecio y reconocimiento. Sus descubrimientos fueron rápidamente anunciados y publicados a través de la Academia de Viena, la *Monatsheft,* y el coloquio de Menger. (En circunstancias menos favorables, el esfuerzo que se requiere para ver publicadas las cosas le habría frustrado mucho y es probable que hubiera publicado mucho menos durante su periodo de Viena.) Era muy amigo de Hahn y de Schlick y también de algunos otros colegas. Su hermano estaba allí y su madre vivió en Viena desde el otoño de 1929 al de 1937. Antes del otoño de 1929 iba con frecuencia a Brünn en las vacaciones. Había conocido a su mujer unos diez años antes de que se casaran en 1938. Es probable que tuviera incluso una estrecha relación con ella durante la mayor parte de este tiempo.

El aspecto filosófico de los resultados de G relativos a la completud y la incompletud son más fáciles de entender en los contextos del formalismo de Hilbert y del positivismo lógico. Si hubiera resultado que los sistemas formales matemáticos fueran completos y decidibles y su consistencia demostrable por medios finitistas, se habría hecho un avance asombroso, decisivo para nuestra comprensión de las matemáticas y fundamental para la del conocimiento humano. De ahí que, dada la prominente postura de Hilbert y el entusiasmo de Hahn y Schlick, fuera filosóficamente importante resolver el asunto si fuera posible, y el hecho de que la cuestión se planteara en una forma matemáticamente abordable no hacía sino añadirle atractivo a los ojos de G.

Las soluciones negativas dadas por G a los problemas muestran que no podemos tener tales netas respuestas exhaustivas para estas cuestiones fundamentales acerca de la naturaleza del conocimiento matemático. El solo demostró que la matemática *no es* «sintaxis», pero todavía estamos muy lejos de tener una idea clara de lo que la matemática *es*. En conexión con esto, resulta interesante reflexionar en la afirmación de G de que «las consecuencias filosóficas de mis resultados, lo mismo que los principios heurísticos que llevan a ellos, son cualquier cosa menos positivistas o empiristas». Los principios heurísticos se explicitan en sus dos cartas dirigidas a mí (*MP* pp. 8-11). En cuanto a las consecuencias filosóficas, se hallan mencionadas en observaciones dispersas (*MP* p. 324, y en diversos lugares de sus conversaciones, que se recogerán en *CG;* consúltese también *BA,* p. 15). Según parece, sus dos ensayos no publicados escritos en la década de 1950 (La Gibbs Lecture y el ensayo sobre Carnap) consideran más ampliamente tales consecuencias.

Hacia 1931 se dieron diversos factores que, en mi opinión, empezaron a tener influencia en la determinación del curso ulteriormente seguido por el trabajo de G. El éxito tan espectacularmente rápido del trabajo realizado entre 1929 y 1930 generó una inclinación a interesarse por problemas conceptuales susceptibles de ser elucidados por medios matemáticos. En este sentido, la opción por los fundamentos de la matemática no podía ser más natural habida cuenta de su pericia lógica y del papel central desempeñado por las matemáticas en su filosofía. Estaba por ejemplo, el problema de la evidencia y, en especial, su relación con el intuicionismo.

Una dirección más atractiva la suponía la teoría de conjuntos. El creía que respecto de la teoría de números, había solucionado las cuestiones matemáticas de los principales problemas conceptuales (salvo el relativo al esclarecimiento del concepto de computabilidad). La teoría de conjuntos presenta problemas nuevos y abre una amplia perspectiva nueva. Por otro lado, el problema del continuo es concreto, sugestivo y tan rico desde el punto de vista conceptual que una clarificación decisiva del mismo sólo puede traducirse en un enriquecimiento de nuestra comprensión del concepto de conjunto. Lo más probable es que de la solución dada por Hilbert al problema no oyera hablar por primera vez hasta el verano de 1930. A partir de entonces el problema acaparó a intervalos su atención durante el resto de su vida. Es probable que entre 1931 y 1943 pensara mucho en él. A finales de la década de 1960 vuelve de nuevo a

este problema, dedicándole esporádicamente la atención entre 1969 y 1975.

En 1938 G demostró la consistencia de la hipótesis del continuo (y de su forma generalizada) y en 1942 dio con una suerte de método que parecía prometedor para demostrar la independencia de dicha hipótesis. Pero no encontró la manera de pergeñar una demostración y empezó a sentir aversión por el tema. Por esta época, su continua atención a su gran preocupación por la filosofía había generado, por combinación de fuerza con estancamiento, el ímpetu suficiente para apartar su atención de la investigación lógica.

Respecto del intuicionismo y el problema de la evidencia, en 1932 obtuvo tres fáciles (para él) a la vez que esclarecedores resultados relativos al sistema formal de la lógica (y de la teoría de números) intuicionista. En 1940 empezó a hacer un minucioso estudio de la obra de Brouwer, la cual parece que fue la que le sugirió la idea de probar la independencia en teoría de conjuntos. En 1941 obtuvo un resultado más sustancioso al dar una interpretación informativa de la teoría intuicionista formal de números. En 1958 añadió algunas consideraciones filosóficas sobre el problema de la evidencia y publicó el resultado. A finales de la década de 1960 dedicó mucho tiempo a mejorar la parte filosófica con el fin de reforzar el razonamiento a favor de su conclusión de que la interpretación hace más evidentes las demostraciones de la teoría de números (intuicionista y, en consecuencia, clásica, por uno de sus resultados de 1932). (Para más detalles sobre este punto, véase la sección 11.1.)

Volvamos a la década de 1930. Durante este periodo, siguió también estudiando matemática pura, física teórica y filosofía. Mientras que la ejecución de su trabajo parece ser prácticamente autónoma (si dejamos de lado la gran influencia, antes mencionada, proveniente de su contacto con el Círculo de Schlick), sus publicaciones, en cambio, con la excepción de unas pocas, estuvieron condicionadas en buena medida por circunstancias externas. Así, la mayoría de sus breves publicaciones de entre 1931y 1936 no son sino informes de sus intervenciones ante el coloquio de Menger (también estuvo los primeros cinco meses de 1939 en Notre Dame invitado por Menger). A partir de 1940, casi todas sus publicaciones no son sino respuestas a invitaciones.

En una dirección distinta, el impacto de la «conexión de Princeton» sobre la obra de G es difícil de evaluar. Cierto que las visitas de 1933/34, 1935 y 1938 contribuyeron a una difusión más amplia

y efectiva de la obra de G, así como a preparar el terreno para su establecimiento en Princeton desde comienzos de los años 40. Pero también parece que estas visitas supusieron una gran tensión para G, que cayó enfermo en 1934 y también entre 1935 y 1936. No es fácil calcular cuánto dañaron la salud de G y cuánto afectaron a su obra estas largas estancias fuera de casa. Lo que parece es que en la década de 1930 no hizo nuevos descubrimientos mientras estuvo ausente de Viena.

Las incertidumbres de la segunda mitad de 1939 obligaron a G a hacer una serie de cosas extraordinariamente arduas para él: presentarse para el puesto de Dozent, contemplar la posibilidad de un puesto en la industria, enviar una carta (a Veblen) solicitando ayuda, viajar a Berlín a por visados y, a comienzos de 1940, emprender el largo viaje (vía Siberia) de Viena a Princeton. Afortunadamente, en este largo viaje le acompañaba su mujer. Las dificultades de este periodo deben haber contribuido a aumentar el consuelo y la satisfacción sentidos al final del viaje, cuando él y su mujer pudieron contemplar ante sí una vida estable y segura para los años venideros.

Los cuadernos de notas de G parecen mostrar que en 1940 inició un intenso trabajo tanto en lógica como en filosofía, completando la mayor parte de los mismos en los años siguientes. Como he señalado hace un momento, probablemente a finales de 1942, G se cansó de los esfuerzos realizados tratando de demostrar la independencia de la hipótesis del continuo. A partir de 1943, G dejó de investigar en lógica y casi todo su trabajo posterior se puede decir que es más filosófico que matemático.

Este parece un lugar adecuado para introducir una evaluación de la obra de G hecha por mí y aprobada por él (contrariamente a lo establecido) con ocasión de su recepción, el 1 de junio de 1972, del título de doctor *honoris causa* de la Universidad de Rockefeller. Este texto ofrece una lista de las principales contribuciones de G en el campo de la lógica, lista que puede servir como resumen del trabajo por él realizado con anterioridad a 1943. También alude en términos generales a la obra por él realizada en física (de orientación filosófica) y en filosofía fundamental, iniciada en buena medida en 1943. Parece, pues, apropiado insertar este documento para luego resumir mi relación del trabajo realizado por G durante su vida.

1.3. Mi evaluación de 1972

Hombre teórico con talento intelectual del más elevado orden, el profesor Gödel no se ocupa de nada más que de aquello que es fundamental. El nivel de los logros por él realizados es supremo en lo que a la ciencia se refiere, profundo en filosofía y noble en las relaciones humanas. En lo que a los fundamentos de la matemática atañe, su obra ha dado, directa o indirectamente, lugar a la mayor parte de los desarrollos principales de las pasadas décadas. Pero su interés por las cuestiones de fundamentos no se restringe en modo alguno a las matemáticas. Así por ejemplo, ha realizado un trabajo significativo en física: la construcción de universos rotatorios sobre la base de la teoría einsteiniana de la relatividad. Sin embargo, probablemente ha dedicado más energía a la filosofía fundamental que a la ciencia. Esbozos de su filosofía presentes en conversaciones y en trabajos publicados dan prueba de una omnímoda y vigorosa gran estructura que tiene puntos de contacto con las filosofías de Platón, Leibniz y Husserl. En la esfera humana, es tan meticuloso en su trato con la gente como en las cuestiones teóricas, y especialmente generoso para con sus amigos, tanto en cuanto a su tiempo como a su saber. Los que tienen la suerte de conocerlo personalmente no han dejado de asombrarse de su afectuosidad, encanto y gracia. El profundo respeto que suscita entre los grupos más diversos no es frecuente en el mundo moderno. En un mundo de gentes que compiten entre sí, él está por encima de toda rivalidad.

La obra del profesor Gödel ha revolucionado la lógica moderna, elevando enormemente su grado de importancia tanto matemática como filosófica. Y las matemáticas y la filosofía hechas por él son excepcionales por su significatividad, belleza y falta de rencor. Su obra constituye una base y una fuente de energía en todas las ramas actuales de la lógica. Una lista incompleta de sus contribuciones a la lógica no puede menos de incluir: 1) su prueba de la completud de la lógica de predicados (1930), 2) su método para construir, para cualquier sistema axiomático formalizado de la matemática, una cuestión de teoría de números indecidible dentro del sistema (1931), 3) su prueba de que la consistencia de cualquiera de los sistemas de la matemática clásica no puede probarse dentro del mismo sistema (1931), 4) su prueba de la consistencia del axioma de elección y de la hipótesis de continuo de Cantor con los axiomas normalmente aceptados en teoría de conjuntos (1938), y 5) su interpretación constructiva de la teoría clásica de números (1958). Por lo que se refiere a cuestiones de más alcance, su célebre artículo de 1931 sobre problemas indecidibles supuso un golpe fatal para el modo formalista de Hilbert de enfocar los fundamentos de la matemática. Por lo demás, este artículo, suplementado con la definición dada por Turing de máquina computadora, llevó a la sorprendente consecuencia de que, ni siquiera en campos tan restringidos como el de la teoría

de las ecuaciones Diofánticas, puede una máquina decidir todas las proposiciones. De ahí que sea un privilegio y un honor presentar al Profesor Gödel para la recepción de su doctorado *honoris causa* de la Universidad Rockefeller.

Mientras estaba preparando la anterior presentación, G me pidió que le dejara leer los diversos borradores y se ofreció a hacer algún comentario. En concreto, recuerdo sus objeciones a una formulación previa en la que se decía que su obra «dominaba» la lógica matemática. También expresó sonriente su escepticismo acerca de la expresión «por encima de toda rivalidad». Bradford Dunham y Stanley Tennenbaum me ayudaron a buscar el lenguaje adecuado en diversos puntos.

De acuerdo con la concepción que G tenía de la filosofía, lo más importante de su obra está estrechamente relacionado con ella: o es de filosofía, o su motivación es filosófica o tiene consecuencias filosóficas o emplea la filosofía como principio heurístico. Puede incluso suponerse que, para él, todo trabajo de fundamentación teórica se halla relacionado con la filosofía por lo menos de uno de esos cuatro modos alternativos pero no excluyentes. Hay que destacar que en la obra de G se da una extraña y excepcional mezcla de lo nuevo con lo viejo. A la vez que sus resultados científicos son novedosos y sorprendentes, están relacionados con conceptos tradicionales como los de prueba, verdad, (sistemas) formales, conjunto, tiempo y evidencia intuitiva; además, se dice que en filosofía está «chapado a la antigua». Naturalmente, ser capaz de decir cosas radicalmente nuevas acerca de viejos conceptos y cuestiones que nos son familiares no sólo resulta enormemente atractivo sino que es de por sí condición suficiente para el trabajo de fundamentación teórica.

Como antes hemos señalado, G estudió a Leibniz durante 1943-1946. En 1944 publicó el primer ensayo filosófico, aprovechando la ocasión de una invitación a considerar la obra realizada por Russell en lógica para reunir y consignar muchas de sus propias ideas acerca de la lógica, su historia y las cuestiones filosóficas suscitadas por o relevantes para ella. A éste siguió una conferencia en la Universidad de Princeton acerca de las nociones de definibilidad y demostrabilidad absolutas (1946) y un ensayo (1947) sobre el problema del continuo en el que se formula el concepto iterativo de conjunto (BP, pp. 262-265). En 1963, G amplió el último ensayo para

hacer una exposición más completa de su «realismo matemático» (BP, pp. 270-272). Desde finales de 1946 a 1950 G consideró la relación existente entre la teoría de la relatividad y las ideas de Kant y de «los idealistas modernos» los cuales «niegan la objetividad del cambio» y la del tiempo y el espacio. Esta digresión en la obra de G incluía nuevas soluciones a las ecuaciones del campo, las cuales, según él, se puede considerar que apoyan dicha concepción filosófica. Es probable que el interés de G por esta cuestión estuviera también relacionado con su estudio de Leibniz, que era sin duda uno de los idealistas modernos que tenía en la mente. Sin embargo, los rasgos distintivos de las ideas de Leibniz (comparadas con las de los fisicistas, desde Newton hasta Einstein) parecen ir más allá de la idea de que el espacio y el tiempo son subjetivos (compartida por Leibniz y Kant) para requerir un concepto más globalizador de fuerza. Cabe conjeturar que G estaba afrontando la dificultad de pasar de los conceptos de los fisicistas al leibniziano, apoyándose en la concepción kantiana como punto intermedio.

Por lo que parece, G trabajó en 1951 en su Gibbs Lecture, y entre 1953 y 1956 en un ensayo en el que criticaba la concepción de la matemática como sintaxis, compartida por sus maestros Hahn, Schlick y Carnap. Luego trabajó sobre el problema de la evidencia, publicando sus frutos en un artículo de 1958 escrito para homenajear a Bernays. Estos tres ensayos versan todos ellos sobre filosofía de la matemática. G discutió conmigo alguna de las ideas de su Gibbs Lecture (*MP*, p. 324). Pero tanto la mayor parte de la conferencia como el ensayo sobre Carnap parecen estar dedicados a un ajuste de cuentas con el Círculo de Schlick, ofreciendo argumentos que demuestran de forma concluyente que la matemática no puede ser sintaxis del lenguaje. También hacen ver, aunque de modo menos concluyente, su propio objetivismo o realismo matemático (o conceptual), con su un tanto indeterminado ámbito de aplicabilidad, apoyado por diversos grados de evidencia. El artículo de 1958 puede considerarse como un argumento positivo tendente a mostrar que tenemos una fuerte evidencia en favor del realismo por lo menos en el dominio de los números naturales (vía teoría intuicionista de números).

Es evidente que, además de trabajar en estos tres ensayos, G hizo también otras cosas entre 1951 y 1958. Según sus propias declaraciones, su obra se divide en tres partes: filosofía, matemáticas y asuntos relacionados con el Instituto de Estudios Avanzados (del

que, en 1953, se convirtió en profesor). Por lo que parece, durante este periodo no investigó demasiado en matemáticas, si bien se mantenía al día de lo que se hacía en lógica. En conjunto, no tengo una idea clara de los hábitos de trabajo de G ni de las distintas direcciones en que se movieron sus estudios (especialmente a partir de 1951). Un examen detallado de su Nachlass puede darnos una idea más exacta de lo que leía y de sus reflexiones sobre ello en las diferentes etapas de su vida. Creo que, en líneas generales, G organizó su vida (en especial de 1951 a 1958) en torno al trabajo de fundamentación teórica y que durante la mayor parte del tiempo fue capaz de una concentración metódica fuera de serie (salvo cuando quedaba eclipsada por su preocupación por su salud). Como ejemplo señalaré que en 1978 su mujer me contó que dormían en dormitorios independientes porque G se levantaba por la noche (para trabajar). Este es un indicio indudable de la continua preocupación de G por su trabajo.

Según su testimonio, empezó a estudiar a Husserl en 1959. En el Nachlass hay extensas notas sobre la obra de Husserl y de otros. Lo que generalmente se conoce acerca del trabajo realizado por G a partir de 1959 es muy fragmentario y sólo equivale a una fracción de lo que hizo. Cabe suponer que en 1959 y 1960 estudió intensamente a Husserl. En 1961 su salud fue muy mala, según su propio testimonio. Durante el decenio de 1960 escribió añadidos y notas con ocasión de la reedición de algunos de sus primeros ensayos (incluidos también algunos añadidos a su artículo de 1958 realizados en la última parte del decenio). En 1963 el trabajo de Paul J. Cohen hizo revivir en él el interés por la hipótesis del continuo y (de 1969 a 1975) volvió de nuevo ininterrumpidamente a ella. Desde finales de 1967 hasta comienzos de 1968 gastó algunas energías en la redacción de las cartas que me escribió (*MP*, pp. 8-11). Durante el curso académico de 1971/72 decidió aprovechar la ocasión de la discusión del manuscrito de mi *MP* para reunir sus ideas y formular algunas de sus más claras tesis filosóficas, así como para que se incluyeran en el libro esas formulaciones. Las amplias conversaciones que durante 1975/76 mantuvo conmigo puede que también hayan estado motivadas en parte por la idea de que yo formulara algunas de ellas de una forma que resultara publicable.

1.4. Aspectos de la labor de toda una vida

La combinación de ciencia y filosofía, la renuencia a publicar, y la gran cantidad de proyectos inacabados, constituyen los rasgos más destacados del trabajo a lo largo de la vida de G. Además, el modo de abordar sus problemas de salud y su sensibilidad hacia las circunstancias externas son también excepcionales.

Los primeros éxitos de G fijan el listón a un nivel difícil de alcanzar: resultados fundamentales y concretos de gran importancia conceptual (científica y filosófica) que fueron presentados de una forma aceptable (con distintos significados) para perspectivas en conflicto. Pero G parece haber perseguido a veces metas de más alto nivel aún: hacer con la metafísica lo que Newton hizo con la física (*MP* p. 85) o hallar un «fundamento científico» de la ciencia o un análisis de conceptos fundamentales que no sólo capte los «axiomas» sino que también provea de métodos para hacer derivaciones de ellos (en alguna de sus conversaciones). No estoy en condiciones de determinar hasta qué punto se acercó G a metas tan ambiciosas o qué elementos de juicio tenía para creerlas alcanzables. En una o dos ocasiones manifestó que, si hubiera empezado a perseguir estas metas al comienzo de su carrera, hubiera tenido una mayor oportunidad de triunfar. En la práctica, G debe haber seguido la mayoría de las veces principios más moderados a la hora de seleccionar sus temas de investigación. Parece que buscó inspiración en la obra de Leibniz y de Husserl.

Probablemente, G hubiera publicado más cosas de filosofía si se hubiera visto viviendo en una comunidad filosófica más comprensiva. Por ejemplo, se negaba a hablar ante lo que consideraba una audiencia hostil. Su renuencia a publicar (comparable posiblemente a la de Newton) y su preferencia por pensar los problemas en privado parecen ser dos aspectos en los que se distanció mucho de Einstein, quien parece haber perseguido con frecuencia sus metas en público, especialmente en lo que se refiere a su teoría general (desarrollada de 1907 a 1915: véase Pais, pp. 177-257). El récord kantiano de publicación en las últimas décadas de su vida contrasta enormemente con la incapacidad de G para concluir sus proyectos. (En 1798 Kant se impacientó con la demora en la publicación de uno de sus ensayos, alegando que no tenía el hábito de trabajar para nada ni de arrojar por la borda lo que había hecho.)

De alguna gente famosa se conserva y recuerda algún juicio ju-

venil sobre planes futuros. Desconozco si existe un documento así de G. Hay uno de Einstein (escrito en 1895) en el que alude a su intención de ir a Zurich a estudiar matemáticas y física (durante cuatro años): «Me imagino a mí mismo convertido en un profesor de estas ramas de la ciencia natural, eligiendo la parte teórica de las mismas... Por encima de todo está [mi] aptitud para el pensamiento matemático y abstracto, [mi] falta de imaginación y habilidad práctica. Mis deseos también han inspirado en mí la misma resolución.» (Pais, p. 40.)

Puede resultar interesante contrastar esto con un juicio de Marx, que también realizó un trabajo de fundamentación teórica, aunque de muy distinto tipo. En 1835, a la edad de diecisiete años, escribió un ensayo, «Reflexiones de un joven sobre la elección de profesión» (*Karl Marx Frederick Engels Collected Works*, vol. 1, 175, pp. 3-9). Estas generosas y exaltadas reflexiones consideran la abstracta cuestión de la elección libre de profesión e indican que «si nuestras condiciones de vida nos permiten elegir la profesión que queramos, hemos de optar por aquella que nos asegure el mayor valor». Según Marx, toda profesión no es sino un medio de aproximación al propósito general de la perfección. Más en concreto, dice,

> Pero la principal brújula que debe guiarnos en la elección de profesión es el bienestar de la humanidad y nuestra propia perfección. No se debe pensar que estos dos intereses puedan estar en conflicto, que uno haya que destruir al otro; antes al contrario, la naturaleza del hombre está constituida de tal modo que éste sólo puede lograr su propia perfección trabajando por la perfección, por el bien de sus semejantes.
>
> Si uno no trabaja más que para sí mismo, tal vez pueda llegar a ser un hombre de ciencia famoso, un gran sabio, un excelente poeta, pero nunca será un completo y verdadero gran hombre.

1.5. **La amistad entre Gödel y Einstein**

Los dos crecieron y realizaron lo mejor de su labor conocida en Europa Central, siendo el alemán su primera lengua. En 1905, el «año milagroso», Einstein concluyó sus artículos sobre relatividad (especial), teoría cuántica de la luz y movimiento browniano, así como su tesis doctoral (Pais, p. 89). G había demostrado la comple-

tud de la lógica elemental y la incompletud de la matemática dos años antes de llegar a la misma edad. El gran esfuerzo, coronado por el éxito, realizado por Einstein, entre 1907 y 1915, para formular la relatividad general también se podría pensar que tiene una suerte de contrapartida en el empeño de G por establecer la hipótesis del continuo, con la diferencia de que el trabajo realizado por G entre 1930 y 1938 sólo tuvo un éxito parcial (a saber, la prueba de que no es refutable por los axiomas conocidos).

Como durante los dos o tres primeros años de estudios universitarios G se había especializado en física teórica, es indudable que en esa época estaba al tanto de los principales aspectos de la obra de Einstein. Es muy probable que asistiera a la conferencia impartida por Einstein en 1931 en el Instituto Físico de la Universidad de Viena. Se conocieron en el otoño de 1933 durante la primera visita de ambos a Princeton. Los estrechos contactos entre ellos empezaron en 1942. Se dice que entraron en contacto gracias a los buenos oficios de Ostwald Veblen (1880-1960), de Paul Oppenheim (1885-1977) o de ambos. A partir de ese momento y hasta la muerte de Einstein en 1955 se vieron y hablaron entre sí «casi diariamente».

En una carta a Bruno Kreisky (Brundesminister für Auswärtige Angelegenheiten de Austria), fechada el 25 de octubre de 1965, Oskar Morgenstern escribió,

> Einstein me ha dicho con frecuencia que durante los últimos años de su vida ha buscado continuamente la compañía de Gödel para discutir con él. En una ocasión me dijo que su obra ya no significaba mucho, que él venía al Instituto (edificio) simplemente «um das Privileg zu haben, mit Gödel zu Fuss nach Hause gehen zu dürfen» («para tener el privilegio de poder regresar a casa con Gödel»).

En su *Albert Einstein* (1960), Carl Seeling cita de una carta de G (del otoño de 1955) el siguiente párrafo para ilustrar la versión que G tenía de sus discusiones con Einstein: «Einstein ha hablado con Gödel especialmente de filosofía, física y política, y generalmente también de su teoría del campo unificado, aunque, o precisamente porque, sabía que su interlocutor estaba en una postura escéptica contrapuesta a la suya» (p. 421). [La carta de G parece sugerir la hipótesis de que E disfrutaba de su compañía porque G tenía ideas distintas de las de E en muchas áreas y no dudaba en expresar-

las. Esto parece implicar que a E le desagradaban otras personas que o bien se mostraban enseguida de acuerdo con él o no manifestaban su desacuerdo. Seguramente, la razón más importante era la sensación de igualdad, la claridad de pensamiento de ambos, así como el atractivo tanto de las ideas de G como de su modo de expresarlas.]

Ernst Gabor Straus (1922-1986), que fue ayudante de Einstein de 1944 a 1947, se ha referido a la relación entre G y Einstein en diversas ocasiones. La siguiente cita incluye también el modo como él ve la especial formulación que G hacía de una especie de «racionalismo» universal (Woolf, p. 485).

Ningún informe de Einstein en Princeton estaría completo si no mencionara su cálida y estrecha amistad con Kurt Gödel. Eran completamente distintos, pero por alguna razón se entendían bien y se apreciaban enormemente. Einstein contaba con frecuencia que se dio cuenta de que no debía hacerse matemático porque la riqueza de problemas interesantes y atractivos era tan grande en este ámbito que uno podía perderse en él sin llegar nunca a nada de genuina importancia. En física, en cambio, él podía ver cuáles eran los problemas importantes y, con firmeza de carácter y tenacidad, seguirles la pista. Pero una vez me dijo, «Ahora que he conocido a Gödel sé que en matemáticas existe lo mismo». Pero Gödel tenía un interesante axioma a través del cual contemplaba el mundo, a saber, que nada de lo que sucede en él se debe a accidente o a estupidez. Si uno se toma este axioma verdaderamente en serio, todas las extrañas teorías en las que Gödel creía se convierten en absolutamente necesarias. Intenté en varias ocasiones desafiarle, pero no había modo. Quiero decir que de los axiomas de Gödel se seguían todas ellas. Einstein en realidad no pensaba eso, simplemente lo encontraba divertido. Menos la última vez que le vimos, en 1953, que dijo: «Gödel se ha vuelto realmente loco.» Yo pregunté, «¿qué más ha podido hacer?». Y Einstein respondió, «Ha votado a Eisenhower».

En otro lugar Straus destaca también el especial respeto que E sentía por G. Es muy probable que E, que lo que más valoraba en matemáticas y en física era la exploración de los fundamentos, admirara en G al maestro que «ha hecho temblar los cimientos de la lógica más que nadie desde Aristóteles» (Seelig *op. cit.*, p.417).

Aunque hay muchas alusiones a la amistad entre G y Einstein, son pocas las informaciones de detalle que se dan. Fue probablemente en el verano de 1946 cuando Marianne, la madre de G, oyó hablar por primera vez de su estrecha relación con Einstein y co-

menzó a introducir èn su correspondencia el tema de éste, sin duda un tema del gusto de ambos. A partir de este momento, encontramos a Einstein frecuentemente citado en las cartas a Marianne *(LM),* especialmente de julio de 1946 a mayo de 1956. En diversas ocasiones, G manifestó, «Veo a Einstein casi diariamente». Hay comentarios sobre el estado de salud de Einstein, discusiones de artículos o libros acerca de él, etc. Los pasajes de *LM* que tienen que ver con Einstein no sólo dan una imagen concreta de la amistad de G con él, sino que también ilustran la intimidad entre G y su madre y arrojan nueva luz sobre la última década de la vida de Einstein.

En una carta a C. Seelig, Helen Dukas, secretaria de Einstein, describía la vida diaria de éste durante este periodo en los siguientes términos (tal y como se hallan reformulados en Pais, p. 473):

La mente de Einstein siguió manteniéndose intensamente activa y totalmente alerta hasta el fin de su vida. Sin embargo, durante los últimos diez años, su edad, su estado de salud, su inagotable deseo de hacer física y la multitud de compromisos extracientíficos exigían economía en el empleo de sus energías y de su tiempo. No se apartaba en la medida de lo posible de sus sencillas rutinas. Bajaba a desayunar hacia las nueve de la mañana, luego leía los periódicos. Hacia las diez y media iba andando hasta el Instituto de Estudios Avanzados, donde estaba hasta la una, y luego regresaba a casa. Sé de una ocasión en que un coche chocó contra un árbol después de que su conductor reconociera de pronto el rostro del bello viejo que caminaba por la calle, con su gorra negra de lana firmemente calada sobre sus largos cabellos blancos. Después del almuerzo se acostaba unas horas. Luego, tomaba una taza de té, trabajaba algo más, atendía el correo, o recibía a gente con la que discutía sobre cuestiones no personales. Entre las seis y media y las siete tomaba algo para cenar. Después, trabajaba de nuevo o se dedicaba a oír la radio (no tenía televisión en casa) o alguna vez recibía a algún amigo. Normalmente, se retiraba entre las once y las doce. Los domingos por la noche escuchaba el programa de noticias de Howard K. Smith. Nunca había invitados a esa hora. Las tardes de los domingos las dedicaba a pasear o a dar una vuelta en el coche de algún amigo. A veces iba a algún concierto o al teatro, y muy raramente al cine. Algunas veces asistía a un seminario de física en el Laboratorio Palmer, produciendo su presencia el silencio reverencial al que he aludido antes. En los últimos años, ya no tocaba el violín pero improvisaba diariamente al piano. También había dejado de fumar sus amadas pipas.

En su carta a Marianne del 21 de julio de 1946, G escribía,

Einstein vive ahora solo con su hermana y con su secretaria. El y su primera mujer se divorciaron y la segunda murió en 1936. Hasta ahora sólo he estado en su casa en dos o tres ocasiones, siempre para hablar de temas científicos. Creo que apenas invita a gente a su casa. Sí, disfruta navegando a vela, pero éste parece que es un deporte que también tiene sus riesgos. Sin ir más lejos, el último año una vez se cayeron al agua todos los que iban en el bote (yo no estaba).

El 15 de agosto añadió como postdata: «Cuando hace poco escribí acerca de Einstein, me olvidé de decirte que tiene también una hija que, si no todo el tiempo, sí vive mucho en su casa. Tanto su hermana como su hija parece que están ambas muy enfermas. Einstein nació el mismo año que tú ¿lo sabías?»

Tras la muerte de Einstein el 18 de abril de 1955, G escribía —el 25— a su madre,

La muerte de Einstein me ha conmocionado mucho porque no me la esperaba. Precisamente en las últimas semanas Einstein daba la impresión de estar muy fuerte. Cuando caminaba conmigo media hora hasta el Instituto hablando al mismo tiempo, no mostraba señales de fatiga, como había sucedido en muchas ocasiones anteriores. No cabe duda de que he perdido personalmente mucho con su muerte, sobre todo porque en sus últimos días me trataba incluso con más amabilidad de la que solía, hasta el punto de que tenía la sensación de que quería ser más extrovertido que antes. Se había encerrado mucho en sí mismo en cuanto a las cuestiones personales. Como es natural, mi estado de salud ha empeorado en la última semana, sobre todo en lo referente al sueño y al apetito. Pero he tomado un fuerte somnífero un par de veces y ya he recuperado de nuevo el control.

Dos meses más tarde (el 21 de junio) G observaba: «El que la gente no me mencione nunca en relación con Einstein me resulta muy satisfactorio (y también se lo hubiera resultado a él, toda vez que era de la opinión de que un hombre famoso también tiene derecho a su vida privada). Desde su muerte he sido invitado un par de veces a decir alguna cosa acerca de él, pero naturalmente no he aceptado la invitación. Mi salud es ahora buena. Durante los dos últimos meses he recobrado la fuerza.»

El 24 de febrero, de 1956, G comentaba a propósito de cierta actitud negativa hacia Einstein: «El antagonismo hacia Einstein no se debe sólo enteramente a razones políticas. Lo que hoy es objeto

de reconocimiento general no es más que el material que Einstein produjo durante la primera mitad de su vida. Lo que hizo durante los últimos 20 o 25 años no ha sido en cambio establecido como verdadero, y la mayoría de los físicos, incluidos los judíos, consideran que está en una dirección equivocada.»

Según el testimonio de G, él y Einstein discutían en general de física, filosofía y política. Pero apenas hace referencia al contenido de sus conversaciones. Así por ejemplo, aunque se habla ampliamente de que discutían sobre sus distintas actitudes hacia Eisenhower y G habla de él muchas veces en *LM,* el desacuerdo de Einstein a propósito de este asunto no sale nunca a relucir en estas cartas. Una excepción la constituye la ocasión en que G escribió, el 11 de diciembre de 1946, informando de lo que Einstein le había dicho del proyecto de una aeronave: «La gente construirá una aeronave que pueda volar tan rápido (7 km. por seg.) y subir tan alto, que se mantenga por sí misma y dé vueltas alrededor de la tierra como una luna (de ahí que se la llame también "luna artificial"). Desde este aparato volador se podrán contemplar todas las partes de la tierra como en un mapa.»

1.5.1. *G y la salud de Einstein*

No es sorprendente que G escribiera mucho acerca de su propia salud, la de Einstein y la de Marianne. En general, G tendía a creer y a manifestar que la salud de Einstein era muy buena. Esta es la razón por la que se sorprendió y asombró tanto cuando Einstein murió (de repente para él) en 1955. G no sabía que desde el verano de 1955 Einstein vivía a sabiendas bajo la amenaza de la muerte (Pais, p. 476): «Los que estábamos cerca de él», declaraba Helen Dukas después de su muerte, «sabíamos de la espada de Damocles que pendía sobre nosotros. El también sabía de ella, y la aguardaba con calma y sonriente». Como las observaciones que G hace sobre el estado de salud de Einstein se sitúan en el contexto de su respeto mutuo, me permitiré extenderme un poco en ellas.

A juzgar por las cartas de G, Einstein permaneció en casa (la mayor parte del tiempo acostado) desde primeros de noviembre hasta finales del año 1946: «No parece que tenga nada grave. Cuando lo visité hace poco lo encontré tan vivaracho y alegre como siempre. Sigue también trabajando con normalidad pero dice que

siente flojera de pie.» El 11 de diciembre: «Einstein no sale nunca todavía, pero ya se siente más fuerte, cosa que puede también colegirse por su voz.» 5 de enero de 1947: «Einstein ha estado viniendo una semana al Instituto y se ha repuesto por completo. Sin embargo, cuando lo iba a ver a su casa, con frecuencia me daba la impresión de que estaba bastante débil, hasta el punto de llegar incluso a temer por él.» 16 de marzo: «La salud de Einstein es de nuevo buena. Su estado de debilidad de hace algún tiempo parece que no se debió tanto a enfermedad cuanto a "preparativos para un reconocimiento médico".»

En el verano de 1947, Einstein tuvo que quedarse otra vez en casa. Pero entre el otoño de 1947 y el de 1948, a G le parecía que Einstein estaba bien. El 4 de julio de 1948, G informaba de que Einstein estaba haciendo una cura de reposo aconsejado por el médico, «aunque está muy bien. Por eso ahora estoy muy solo y apenas hablo con nadie en privado». 31 de julio: «Visito a Einstein todas las semanas, tiene buen aspecto y trabaja normalmente, aunque este año no con tanta intensidad.» 28 de septiembre: «Einstein está de nuevo completamente restablecido y va todos los días al Instituto lo mismo que antes.» 17 de febrero de 1948: «Sigo dudando sobre la conveniencia de que G vaya andando al Instituto en este tiempo. Pero, en lo que a esto se refiere, a cabezonería no le gana nadie.» 12 de julio: «Veo a Einstein casi todos los días. Está muy fuerte para su edad. No parece que esté ya cerca de los setenta, y ahora parece también encontrarse bien de salud.» 22 de agosto: «Einstein está pasando también su segundo verano en Princeton.»

Durante algunos años Einstein tuvo dolores en la parte superior del abdomen. En el otoño de 1948 el internista Rudolf Nissen le diagnosticó un tumor abdominal y le recomendó que se sometiera una laparotomía exploratoria. Einstein accedió e ingresó en el Hospital judío de Brooklyn el 12 de diciembre de 1948. Fue operado y abandonó el hospital el 13 de enero de 1949. La «espada de Damocles» mencionada por Helen Dukas no era sino el descubrimiento en el verano de 1950 de que el aneurisma iba en aumento. (Para más detalles y referencias, véase Pais, pp. 475-476.)

Este es el contexto de los siguientes informes dados por G a su madre en 1949. 17 de enero: «Einstein va al parecer muy bien. Al menos eso me dijo uno de los doctores que le atienden. Ha regresado a casa hace unos días, todavía ha de cuidarse y no recibe aún visitas. Después de todo, la operación ha tenido lugar hace sólo 17 días

y no se puede pedir más. No debe haber sido una operación muy difícil (no ha sido de vesícula biliar, como se ha dicho en los periódicos).» 26 de febrero: «He visitado a Einstein en la cuarta semana después de su operación. Lo único digno de señalar es que estaba más pálido que de costumbre. Estaba a punto de salir para Florida donde habrá de recobrarse.» 28 de julio: «Acompaño, como de costumbre, casi todos los días a Einstein. Tiene un aspecto mucho mejor desde la operación y "se ha vuelto sumamente activo".»

Durante los años restantes de Einstein, G creyó al parecer que gozaba de buena salud, por lo que hace menos comentarios sobre esta cuestión. 12 de abril de 1952: «Veo a Einstein casi todos los días. Está muy fuerte y en los últimos años se ha vuelto más joven que antes, en vez de más viejo. La operación de diciembre de 1949 [debe ser 1948] ha resultado muy positiva.» 31 de octubre: «Einstein ha estado enfermo un par de semanas (ha tenido una ligera inflamación de venas), pero ya está de nuevo yendo a pie desde el Instituto hasta su casa.» 21 de septiembre de 1953: «Einstein está muy bien. Este verano se ha sentido especialmente bien. De todos modos, ahora resulta excesivo para él ir y volver andando al Instituto, pues esto supone un paseo de cerca de una hora. Por eso ahora no hace andando más que un solo trayecto.» 19 de marzo de 1954: «Sigo viendo a Einstein casi diariamente. Lo único que el tiempo en invierno suele ser demasiado malo para pasear.» (G estuvo también enfermo en el otoño de 1954.) 5 de enero de 1955: «No estoy tan solo como piensas. Visito con frecuencia a Einstein y me visitan Morgenstern y otros.» 14 de marzo: «Einstein se ha recuperado del todo y va diariamente andando al Instituto como de costumbre. Además, hoy cumple 76 años. Tanto su casa como el Instituto han sufrido el asedio de los periodistas. Pero en vano, porque no le prestó al asunto la menor atención.» 10 de abril: «Einstein sigue estando bien.»

El miércoles 13 de abril, sufrió un colapso en su casa. Durante los días que siguieron declinó todas las recomendaciones que se le hicieron para que se operara. Según Helen Dukas, dijo: «Quiero partir cuando *yo* quiera. Es de mal gusto prolongar la vida artificialmente. He hecho mi parte. Es el momento de partir. Lo haré con elegancia» (véase Pais, p. 477).

1.5.2. *La opinión de G sobre la vida pública de Einstein*

En alguna ocasión G hizo algún comentario sobre la imagen pública de Einstein. Por ejemplo, el 15 de agosto de 1947 escribía que hay de nuevo un culto a Einstein «debido a que ha contribuido en buena medida (indirectamente a través de su primer trabajo) a la invención de la bomba atómica». «Einstein ha aparecido ya en una película y se ven también muchos retratos de él en las revistas ilustradas, pero él juzga muy negativamente la mayoría de ellos» (27 de abril de 1947). El 16 de marzo de 1948, G hablaba a propósito de la recepción del premio por parte de Einstein del «mundo no dividido» y de su idea de un «gobierno mundial». También decía: «Yo también creo que su fama no se basa únicamente en su trabajo científico.» El objetivo de un gobierno mundial con capacidad militar era mencionado de nuevo el 12 de julio en relación con el papel de Einstein en el Comité de Emergencia de Científicos Atómicos [al que se incorporó en agosto de 1946, dejando de actuar en enero de 1949]. El 3 de abril de 1950, G decía que había oído en un «programa de televisión» lo que Einstein había dicho del equilibrio armamentista en el mundo.

En el otoño de 1950 G dice en dos cartas que Einstein había dejado de aparecer en público porque estaba cansado de la inutilidad de sus esfuerzos. Einstein, según G, había hecho un llamamiento en contra de la carrera de armamentos, pero las cosas se desarrollaban de forma contraria a sus deseos. Hay también algunos otros comentarios aislados. «Einstein pensaba que la inquietud causada por los comunistas era infundada» (29 de enero de 1952). «El juicio de Einstein sobre América, del que hablas, es interesante, pero yo tengo mis dudas sobre si se adecúa a los hechos» (20 de febrero de 1953). G no creía que la postura de Einstein sobre la «investigación de lealtad» afectara a su popularidad (19 de marzo de 1954). No hubo celebración en Princeton [del 75 cumpleaños de Einstein] ya que a él no le gustaban tales cosas —sólo un encuentro político para honrarle en su ausencia, con respuestas escritas a preguntas (4 de abril de 1954).

1.5.3. *Algunas interacciones no conversatorias*

G hace también mención en *LM* de algunos de sus contactos externos con Einstein. En 1946 G aceptó una invitación para colaborar en un volumen (Schilpp, 1949) destinado a homenajear a Einstein en su 70 cumpleaños. A finales de 1947 Einstein sirvió de testigo a G en su examen para obtener la ciudadanía (para más detalles, véase el capítulo 4, epígrafe *1948*). En 1949 hubo regalos en ambas direcciones: para el cumpleaños de Einstein y (un vaso Ming) para festejar el cambio de casa de G. El 14 de marzo de 1951, G recibió el Premio Einstein. El 17 de diciembre de 1955, G asistió a un concierto en memoria de Einstein.

G escribía el 26 de febrero de 1949, «el 14 de marzo de 1949 Einstein cumple setenta años y no sé qué regalarle. Me parece que no es aficionado a esas cosas. Adele ha tejido para él un chaleco de lana (las cosas hechas a mano son aquí difíciles de conseguir), pero luego rechazó la idea de regalárselo para el cumpleaños y se lo envió a Florida. Él ha escrito desde allí una encantadora nota de agradecimiento». «Tras mucho buscar, le he enviado para su cumpleaños un aguafuerte» (16 de abril).

G y Adele se cambiaron a su primera (y única) casa (en el 129 de Linden Lane) el 1 de septiembre de 1949. «Hoy (12 de septiembre) hemos tenido una sorpresa especial. Einstein nos ha enviado un precioso jarrón como obsequio por la nueva casa. No nos esperábamos nada por el estilo.» 18 de octubre: «La familia Einstein nos ha visitado hace poco. Tiene también una hija que me ha parecido muy guapa.» Probablemente respondiendo a una pregunta de Marianne, G decía el 18 de enero de 1950: «A Einstein le ha gustado mucho nuestra casa.»

G estuvo enfermo en febrero de 1951 y escribía el 17 de marzo para comunicar que se había recuperado y que había recibido el premio Einstein. «Durante mi enfermedad Einstein ha sido sumamente amable conmigo y me ha visitado muchas veces tanto en el hospital como en casa. Probablemente ya hayas leído en los periódicos de Viēna algo acerca del premio que he recibido (junto con otro científico) el día de su cumpleaños. Ha sido una sorpresa para mí.»

Hay en las cartas muchas referencias al volumen Schilpp 1949 y a la contribución de G al mismo. El pasaje más largo e informativo

sobre (una primera versión de) el ensayo de G se halla contenido en su carta de 7 de noviembre de 1947).

En esta ocasión se trata más de una cosa filosófica que matemática, a saber, la relación de Kant con la teoría de la relatividad de Einstein, y nada está, como es natural, tan claro y desprovisto de ambigüedad como en la matemática pura. He elegido yo mismo el tema cuando se me pidió que escribiera un artículo para un volumen dedicado al significado filosófico de Einstein y de su teoría; naturalmente, no me podía negar. Tampoco siento haber aceptado y haber elegido precisamente este tema, porque el problema siempre me ha interesado y además su investigación fundamental me ha llevado a resultados puramente matemáticos que publicaré a continuación, o quizás antes, ya que la fecha de publicación de la obra sobre Einstein depende del editor.

18 de diciembre de 1955: «Ayer hubo aquí un concierto en memoria de Einstein. Era la primera vez que dejaba que Bach, Haydn, etc., cayeran sobre mí durante dos horas largas. No obstante, el pianista era realmente extraordinario.»

1.5.4. *La opinión de G sobre los artículos y libros acerca de Einstein*

Marianne se propuso leer libros sobre Einstein y con frecuencia le mandaba a G artículos sobre él. Al parecer, le pidió a G que le recomendara un libro sobre Einstein y G le escribe el 3 de diciembre de 1950: «Compras un libro x cualquiera sobre Einstein y lo más probable es que sea malo. Hay una biografía muy buena de Philipp Frank [probablemente *Einstein: His Life and Times,* 1948], pero es probable que no esté todavía traducida al alemán. (Nota añadida: acabo de enterarse de que ha aparecido en alemán hace un par de meses.)» En una posdata añadía G, «He oído que el libro de Barnett sobre Einstein [probablemente Lincoln Barnett, *The Universe and Dr. Einstein,* 1949] es muy bueno. Pero no incluye nada de índole personal, sino que es una exposición comprensible, en términos generales, de sus descubrimientos físicos».

En la carta siguiente (8 de enero de 1951) daba G algunos consejos:

¿Es tan difícil de entender el libro sobre Einstein [cabe suponer que el de Frank]? A mí me parece que la inquietud ante y el prejuicio contra todo

lo que es «abstracto» desempeñan también un papel en esto. Si intentaras leerlo como una novela (sin pretender comprenderlo todo en la primera lectura), entonces creo que no te parecería tan incomprensible. Sí, ahora estoy trabajando en cosmología, y la cosmología y la física constituyen la ciencia natural.

De los artículos que Marianne envió a G, el primero fue confiscado por la censura que añadió una nota: «retirado el envío adjunto prohibido». «Es un completo enigma para mí cuál haya podido ser la causa», escribía G en su carta de 28 de julio de 1949. El 18 de enero de 1950, G, comentando un artículo en el que se incurría en el conocido tópico de llamar a la teoría de Einstein «la clave del universo», observaba que tales informes sensacionalistas van «contra la voluntad del propio Einstein», y añadía, «La actual situación de su trabajo no justifica (en mi opinión) tales informes, ni siquiera en caso de que los resultados obtenidos en el futuro sobre la base de sus ideas llegaran tal vez a justificarlos. Pero hasta ahora todo es incompleto e incierto». A propósito de un artículo en que se traza la historia de la teoría cuántica, G observaba (3 de diciembre de 1950) que el artículo era totalmente objetivo al considerar con imparcialidad, además de la obra de Einstein, las de Bohr y de Broglie, que no son alemanes.

En dos ocasiones G hizo comentarios acerca de la conocida idea de que la obra de Einstein tiene algo que ver con el hecho de que fuera «religioso». «Es indudablemente religioso en cierto sentido, mas no en el de la iglesia» (27 de julio de 1951). G destacaba (29 de febrero de 1950) que conocía la tesis de que «la instrucción religiosa que había recibido subyace a su empeño de hallar una teoría unificada del mundo entero. En cualquier caso, tendría que haber sido una instrucción muy buena e interesante. Ello difícilmente hubiera sido posible con el tipo [de enseñanza religiosa] que tuvimos». [Una conocida afirmación de Einstein es, «Yo creo en el Dios de Spinoza que se manifiesta en la ordenada armonía de lo que existe» (véase, por ejemplo, Clark, p. 502).] Parece poco probable que nadie pueda extraer semejante concepto de Dios de la «instrucción religiosa».

«El artículo sobre Einstein se esfuerza demasiado en situarse en el término medio exacto entre la derecha y la izquierda, cosa que es, sin embargo en sí misma del todo irrazonable» (10 de febrero de 1954). G dice luego que cuando pasaba a los detalles atribuía a Einstein cosas que evidentemente él no había querido decir en

modo alguno. El 25 de agosto de 1955, G escribía, «El artículo sobre Einstein está resultando muy diletante. Por ejemplo, se le atribuye la afirmación de que Dios no juega a los dados con nosotros, cuando lo que él dijo es que Dios no juega a los dados con el mundo, es decir, que nada en el mundo es dejado al ciego azar, cosa que nada tiene que ver con la interpretación dada por el autor del artículo».

En la misma carta G afirmaba: «No conozco la biografía de Antonina Vallentin. ¿Qué es eso que dice acerca del enfoque psíquico de su vida y de que tuvo poca suerte en su vida privada?» No cabe duda de que Marianne había estado leyendo el libro de Vallentin *Einstein: A biography* (1954) y le preguntó a G por él. Algunos puntos de este libro, que tuvieron en sus manos tanto G como Marianne, se convirtieron en tema de amplia discusión entre ellos. En su siguiente carta (28 de septiembre de 1955), G escribió:

> Si me envías la biografía de Einstein, entonces por favor [hazlo], si es posible, en la versión original. ¿O no está ni en alemán ni en inglés? En este caso sería preferible una versión inglesa, ya que como he observado varias veces, las traducciones al inglés son mucho mejores que las traducciones al alemán. Es cierto que Einstein fue en muchos aspectos un pesimista. En concreto, no tenía una buena opinión de la humanidad en general. Basaba ésta, entre otras cosas, en el hecho de que quienes quisieron hacer algo bueno, como Cristo, Moisés, Mahoma, etc., o bien tuvieron una muerte violenta, o bien tuvieron que emplear la violencia contra sus propios seguidores (como, por ejemplo, Mahoma). Einstein era también muy escéptico respecto del valor de los desarrollos técnicos para la humanidad.

G volvió sobre la biografía en diversas cartas (escritas entre febrero y mayo de 1956). En el ínterim debe de haber recibido una copia. Dice de ella (el 24 de febrero) que es «muy interesante en algunos puntos. Por ejemplo, parece que es la única biografía que dice algo (aunque no mucho) de su hijo menor (que sufría a veces perturbaciones mentales). Otras biografías guardan silencio sobre este punto y Einstein no ha hablado tampoco nunca de ello. Sería interesante conocer cuál fue de hecho la relación de esta Antonina V. con Einstein. Le preguntaré en la próxima ocasión a la hija de Einstein, con quien estoy invitado a tomar el té la próxima semana». En la siguiente carta (29 de marzo) confesaba que se había olvidado de preguntar a Margot Einstein, y añadía, «No puedo creer que Eins-

tein fuera de joven extraordinariamente guapo. Pero una vez vi un retrato de cuando era un niño de unos doce años y parecía realmente precioso y encantador. Creo que en ese tiempo se manifestaba todavía con toda claridad su verdadera naturaleza, la cual más tarde pasó más a la trastienda a consecuencia de sus experiencias en la vida». El 6 de mayo explicaba su observación: «Quiero decir con esto que su buen corazón y su serena naturaleza, como consecuencia de las experiencias tenidas en las relaciones humanas, después ya no fueron tan claramente perceptibles.» En la misma carta añade: «En cuanto a Antonina Vallentin, he sabido que era amiga de la mujer de Einstein. Por tanto, como puedes ver, todo lo ha obtenido, por así decir, de primera mano.» [Al parecer, Vallentin fue «una gran amiga de la segunda mujer de Einstein» y conoció bien a éste durante su estancia en Berlín (Clark, pp. 51-52 y 388).]

Capítulo 2
ALGUNOS HECHOS ACERCA DE KURT GÖDEL

Poco antes de su retiro, G hizo los arreglos necesarios para que yo visitara el Instituto de Estudios Avanzados (durante 1975-76). En la primavera de 1976 se me ocurrió la idea de averiguar más detalles sobre el desarrollo intelectual de G, y él accedió a hablar de ello. Convinimos en que yo escribiría lo que él dijera y le enviaría el resultado para que lo comentara. Así hicimos de forma intermitente durante un año, pero, en esencia, el texto se escribió en junio de 1976. El propuso denominar este informe «Algunos hechos acerca de Kurt Gödel» y dijo que podía publicarlo tras su muerte. Como presumiblemente no consultó sus documentos, algunos de los datos son cuestionables. El texto se reproduce a continuación con algunas notas añadidas con el fin de considerar algunos datos y de insertar algunos detalles relevantes.

Como complemento de esta concisa relación, ofreceré algunos detalles de la interacción de G con el Círculo de Schlick y consideraré su relación con el programa de Hilbert. También se incluye una digresión bastante larga en la que se lo compara con Wittgenstein.

2.1. El texto de 1976

Gödel nació el 28 de abril de 1906 en Brno (o Brünn en alemán), Checoslovaquia (en aquella época, parte de la Monarquía Austrohúngara). Tras completar allí los estudios secundarios, en 1924 marcha a Viena para estudiar física [teórica] en la Universidad. Su interés por la precisión le llevó de la física a las matemáticas y de éstas a la lógica. Disfrutó mucho con las clases de P. Furtwängler (primo del famoso director de orquesta) sobre teoría de números y desarrolló un interés por este tema que fue relevante, por ejemplo, para su aplicación del teorema chino del residuo para expresar funciones recursivas primitivas en términos de adición y multiplicación. En 1926 se pasó a las matemáticas, y a la vez, se convirtió en miembro del Círculo de M. Schlick. Mas nunca ha sido un positivista, sino que incluso en aquella época no aceptaba más que algunas de sus tesis[1]. Andando el tiempo, se fue apartando cada vez más de ellas. Terminó sus estudios formales en la universidad antes del verano de 1929. También asistió durante este periodo a las clases de filosofía impartidas por Heinrich Gompertz, cuyo padre era un destacado especialista en filosofía griega[2].

Por esta época leyó la primera edición del Hilbert-Ackermann (1928) en la que se formulaba y planteaba como problema abierto la completud del cálculo de predicados (restringido). Gödel resolvió este problema y presentó el resultado como tesis doctoral, tesis que fue terminada y aprobada en el otoño de 1929. El título se le concedió el 3 de febrero de 1930. Una versión revisada de esta tesis se publicó en 1930 en la *Monatshefte*. Contiene el siguiente reconocimiento, «Estoy en deuda con el Profesor H.

---

[1] El 4 de noviembre de 1976 G mencionó algunos detalles sobre esta cuestión. En aquel tiempo (en 1926 y poco después), él estaba de acuerdo con ellos en que el estado en que estaba la filosofía era pobre (no por necesidad, sino sólo como accidente histórico), y, en esencia, sólo estaba de acuerdo con su método de análisis de los conceptos filosóficos y científicos (sirviéndose de la lógica matemática). No estaba de acuerdo, en cambio, con su negación de la realidad objetiva ni con su tesis de que los problemas metafísicos carecen de sentido. En sus discusiones con ellos, G adoptó una postura no positivista.

En una de sus publicaciones anteriores a 1930 (*Wissenschaftliche Weltanschauung: der Wiener Kreis*, 1929, editada por O. Neurath con la ayuda de H. Hahn y R. Carnap), G era incluido como miembro. De la *Logische Aufbau* de Carnap, G dijo que se ocupa de la relación entre percepción sensorial y objetos físicos sólo desde el punto de vista lógico, dejando fuera los aspectos psicológicos. No sé si lo que pretendía era comparar esta obra con los escritos de Husserl, de los que en la década de 1970 tenía una buena opinión.

[2] Theodore Gomperz se hizo famoso por su *Griechische Denker*, Viena, 1897 (traducido por L. Magnus, *Greek Thinkers*, London y New York, 1900). Heinrich también se especializó en filosofía griega.

Hahn por diversas sugerencias de gran valor que me han servido de ayuda en la ejecución (Dürchführung) de este ensayo». G me dijo[3] que «en la ejecución» debería reemplazarse por «en lo que respecta a la formulación para su publicación».

En el verano de 1930, Gödel comenzó a estudiar el problema consistente en probar la consistencia del análisis. Le pareció misterioso que Hilbert quisiera probar directamente la consistencia del análisis por medio de métodos finitistas. Generalmente cree que se deben dividir las dificultades de suerte que cada parte se pueda resolver con más facilidad. En este caso concreto, su idea estribaba en probar la consistencia de la teoría de números por medio de la teoría finitista de números y probar la consistencia del análisis por medio de la teoría de números, en la que uno puede asumir no sólo la consistencia de la misma, sino también su verdad. El problema cuya solución halló en esta época era el de la consistencia relativa del análisis para la teoría de números; este problema es independiente del concepto un tanto vago de teoría finitista de números.

Para ello, representó los números reales mediante fórmulas (o sentencias)[4] de teoría de números y vio que tenía que emplear el concepto de verdad relativa a sentencias de la teoría de números con vistas a poder verificar el àxioma de comprehensión del análisis. Enseguida topó con las paradojas (en concreto, con la del Mentiroso y con la de Richard) relacionadas con la verdad y la definibilidad. Se dio cuenta de que la verdad en teoría de números no se puede definir en dicha teoría y de que por esto no funcionaba su plan de probar la consistencia relativa del análisis. De aquí pasó a extraer la conclusión de que en sistemas suficientemente fuertes tales como el de *Principia Mathematica* (teoría de tipos) y el de la teoría de conjuntos (por ejemplo, ZF, «Zermelo-Fraenkel»), hay proposiciones indecidibles. (Véase la sección 7 de las notas sobre las conferencias de Gödel de 1934, M. Davis, pp. 63-65.)

En esta época, Gödel representaba los símbolos mediante números naturales, las sentencias mediante secuencias de números y las pruebas mediante secuencias de secuencias de números. Todas estas nociones y también la función de substitución son susceptibles de expresión incluso en

---

[3] G había terminado su disertación antes de enseñársela a Hahn. Era más larga que el artículo que se publicó y fue aceptada para la concesión del título en su forma original. Fue en la preparación de la versión más breve para su publicación en donde G hizo uso de las sugerencias de Hahn.

[4] O «funciones proposicionales» de acuerdo con una tradición predominante en esta época. He tratado de reconstruir algunos detalles del enfoque inicial de G en mi *Popular Lectures on Mathematical Logic*, 1981 (pp. 21-23). Por lo demás, como ahora sabemos, aún asumiendo la verdad de la teoría de números, sólo podemos representar un fragmento de todos los números reales (a saber, aquellos que son definibles por «conjuntos aritméticos»).

pequeños subsistemas finitarios de la teoría de los tipos o de la teoría de conjuntos. De ahí que haya proposiciones indecidibles en todo sistema que contenga a un sistema así. Las proposiciones indecidibles son de naturaleza finitario-combinatoria.

En septiembre de 1930, Gödel asistió a un congreso en Königsberg (del que se da cuenta en el segundo volumen de *Erkenntnis*) y anunció su resultado. R. Carnap, A. Heyting y J. v. Neumann estaban en el congreso[5]. A v. Neumann le entusiasmó el resultado y tuvo una discusión privada con Gödel. En esta discusión, v. Neumann preguntó si se podrían construir también proposiciones indecidibles en teoría de números, habida cuenta de que los objetos combinatorios pueden proyectarse sobre los enteros y expresó su convicción de que sí. En respuesta, Gödel dijo, «Naturalmente que se podrían construir proposiciones indecidibles acerca de enteros, pero contendrían conceptos muy distintos de los que aparecen en teoría de números como los de adición y multiplicación». Poco después Gödel, para su propio asombro, logró expresar la proposición indecidible en una forma polinómica precedida de cuantificadores (sobre números naturales). Al mismo tiempo, pero con independencia de este resultado, Gödel descubrió también su segundo teorema en el que se establece que ninguna prueba de consistencia de un sistema relativamente rico puede formalizarse en el propio sistema.

El 23 de octubre de 1930, Hans Hahn presentaba ante la Academia de Ciencias de Viena un resumen que recogía estos resultados. Poco tiempo después Gödel recibía una carta de v. Neumann sugiriéndole la idea de considerar el teorema sobre las pruebas de consistencia como una consecuencia del resultado original de Gödel[6]. El célebre ensayo fue recibido para su publicación por la *Monatshefte* el 17 de noviembre de 1930 y publicado a principios de 1931. En una nota fechada el 22 de junio de 1931 (*Kolloquium*, de K. Menger, vol. 3, pp. 12-13), Gödel ofrecía una presentación más general de sus teoremas empleando como sistema básico la aritmética de Peano en vez de la teoría de tipos. Este importante ensayo fue también la Habilitationsschrift de Gödel.

Gödel prestó sus servicios como Privatdozent en la Universidad de Viena durante 1933-1938. Visitó el Instituto de Estudios Avanzados en 1933-1934, hablando en la primavera de 1934 acerca de sus resultados de incompletud (consúltese *The Undecidable, op. cit.*, para las notas de estas conferencias). (Hans Hahn falleció en 1934.) Visitó de nuevo el Instituto en el otoño de 1935. Durante 1936 estuvo enfermo y muy débil.

Desde el otoño de 1938 hasta la primavera de 1947 [debe ser 1946], recibió ofertas anuales de trabajo en el Instituto, donde permaneció todo el

---

[5] Para más detalles, véase cap. 3, epígrafe *1930*.

[6] La carta de v. Neumann fue enviada el 20 de noviembre de 1930.

tiempo salvo la primavera de 1939 en que fue a dar un curso a Notre Dame y el otoño de 1939 en que regresó a Viena[7]. En 1947 [1946] se convirtió en miembro permanente del Instituto y en 1953 en profesor. En 1951 recibió el Premio Einstein y en 1975 la Medalla de la Ciencia. Es doctor *honoris causa* por las universidades de Yale (1951), Harvard (1952), Amherst (1967) y Rockefeller (1972). Es miembro de la Academia Americana de Artes y Ciencias, la Sociedad Filosófica Americana, y la Academia Nacional de Ciencias y miembro extranjero de la Academia Británica y de la Sociedad Real [de Londres].

Durante 1930-33, Gödel prosiguió sus estudios de lógica y matemáticas (incluyéndose aquí los fundamentos de la geometría y el precioso tema de las funciones de variables complejas). Leyó las pruebas del libro de Hahn sobre las funciones reales y se familiarizó con el tema *[Reelle Funktionem (Erster Teil: Punkfunktionem)*, Leipzig, 1932; prefacio fechado en agosto de 1932]. Asistió al seminario de Hahn sobre teoría de conjuntos y participó en el coloquio de Menger. Algunos de los resultados obtenidos por Gödel en este tiempo se hallan recogidos en las actas de este coloquio. También escribió un gran número de reseñas para *Zentralblatt.*

En 1932, Gödel visitó Göttingen, donde vio a Siegel, Gentzen, Noether, y probablemente también a Zermelo. Nunca vio a Herbrand, sino que sólo cruzó cartas con él. Su segunda carta no llegó a manos de Herbrand, pues falleció entretanto. [La carta fue enviada el 25 de julio de 1931 y Herbrand falleció el 27 de julio.] En los primeros años de estancia en Princeton vio con más frecuencia a Church y a Kleene que a Rosser.

La salud de Gödel es generalmente delicada y durante ciertos periodos le ha mantenido apartado del trabajo serio. A los ocho o nueve años padeció de fiebres reumáticas y esto ha influido negativamente sobre su corazón[8]. Durante casi toda su vida de adulto ha tenido también grandes problemas con su digestión. Desde 1947 ha padecido una infección de los riñones que le hace muy sensible a los resfriados, de los que no se recobra si no acude a los antibióticos. En especial, su salud ha sido muy mala en 1936, 1961 y 1970.

Debió ser hacia 1930 cuando Gödel oyó hablar por primera vez del esbozo de prueba propuesto por Hilbert de la hipótesis del continuo en teoría axiomática de conjuntos (pongamos por caso, ZF). Este fue el momento en el que Gödel empezó a pensar en el problema del continuo. Enseguí-

---

[7] G se casó con Adele Porkert el 20 de septiembre de 1938. Me pidió que eliminara esta información de un primer borrador alegando que su mujer no había tenido ninguna influencia directa en su trabajo.

[8] El llegó a creer, en contra de la evidencia, que, como consecuencia de ello, el corazón había quedado dañado para siempre. Contrástese esto con RG, sección 1.1. También me contó una vez que su dentadura había sido mala desde sus primeros años de adulto.

da se dio cuenta de que no se debe construir la jerarquía de un modo constructivo y que no es necesario hacerlo para hallar una prueba de consistencia de CH, por lo que no hace falta construir los ordinales como no sea por un prejuicio contra el punto de vista objetivista. Ante la mente de Gödel se presentó la jerarquía ramificada[9]. Gödel observa que Hilbert no creía que CH fuera decidible en ZF, dado que añade un axioma tácito que establece que todo conjunto es definible y que además califica la prueba por él propuesta de gran triunfo de su teoría de la demostración. Además, según afirmación de Hilbert, él no se limitó a probar únicamente CH, sino que de paso había probado también la consistencia de ZF. De una prueba que podía probar tanto no cabía esperar sino que fuera muy difícil.

Debió ser en 1935 cuando Gödel se acercó por primera vez a su prueba de consistencia del axioma de elección, con una jerarquía ramificada. Después de esto, en 1936, estuvo enfermo. Fue en el otoño de 1937 o en la primavera de 1938 cuando Gödel habló de este resultado en Viena; la serie de conferencias se tituló Axiomatik der Mengenlehre[10]. En el verano de 1938 Gödel extendió este resultado hasta los límites hoy familiares[11]. Introdujo el axioma de constructibilidad y probó la consistencia relativa de GCH. Un informe de estos y otros resultados afines fue presentado ante *Proc. Natl. Acad.* y publicado antes de finales de 1938. Al mismo tiempo, en el otoño de 1938-1939, dio un curso en el Instituto acerca de las principales pruebas, curso que se convirtió en la monografía que apareció en 1940. Una versión más detallada e intuitiva fue comunicada ante *Proc. Natl. Acad.* el 14 de febrero de 1939 y publicada poco después[12].

La salud de Gödel fue relativamente buena durante 1940-1943. Traba-

---

[9] Una valoración más amplia del enfoque de Hilbert por parte de G puede hallarse en *MP* (pp. 11-12). En mi *Popular Lectures* (pp. 127-134) he tratado de elaborar las ideas intuitivas de G sobre los conjuntos constructibles.

[10] El curso se impartió en realidad de mayo a mediados del verano.

[11] Hay una ambigüedad respecto del momento en el que G descubrió su resultado de consistencia en torno al problema (generalizado) del continuo. Parece que G debió de obtener alguna prueba del resultado durante el curso que impartió el verano de 1937 o en todo caso no mucho más tarde (para más detalles, véase cap. 3, epígrafe *1937*). Mas el hecho de que no anunciara en público su resultado hasta el otoño de 1938 parece indicar que no estaba muy satisfecho de su prueba de 1937, o porque no fuera concluyente o porque no encerrara el resultado total (digamos, de una consistencia relativa finitista).

[12] Por una razón accidental, G elaboró la historia de estos resultados en mayo y junio de 1977 y me pidió que escribiera sus observaciones. El resultado es el siguiente:

En conexión con esto su principal logro es en realidad el haber sido el primero que introdujo el concepto de conjunto constructible en teoría de conjuntos, definiéndolo como en su artículo de *Proceedings* de 1939, probó que los axiomas de la teoría de conjuntos (incluido el

jó sobre todo en lógica[13]. En 1941 [o 1942] obtuvo una prueba general de consistencia del axioma de elección mediante consideraciones metamatemáticas. Gödel ha accedido recientemente a reconstruir esta prueba cuando su salud sea mejor. Gödel cree sumamente probable que la prueba valga toda ella incluso cuando estén presentes grandes cardinales. Después de tantos avances en teoría de conjuntos, ver a un resultado obtenido hace treinta y cinco años abrir nuevos horizontes no dejará de ser un acontecimiento destacable.

La famosa interpretación hecha por Gödel de la teoría intuicionista de números mediante funcionales recursivos primitivos se obtuvo en 1942 [debe ser 1941]. Poco después habló de esos resultados en Princeton y Yale [cfr. nota 13]. E. Artin estuvo presente en la conferencia de Yale. El resultado se publicó en alemán en 1958 con motivo del septuagésimo cumpleaños de Bernays. Una traducción inglesa del mismo fue preparada por el propio Gödel antes de 1970 con una nota explicando por qué la prueba no es circular sino que echa mano de algo más evidente para interpretar la teoría intuicionista de números. Ya había pruebas de imprenta del artículo cuando Gödel cayó enfermo [en torno a enero de 1970]. Ahora está deseoso de verlo publicado.

Fue en 1943 [debe ser 1942] cuando Gödel llegó a una prueba de la independencia del axioma de elección en el marco de la teoría (finita) de tipos. La idea de la prueba pone de manifiesto por qué la prueba funciona. Sólo por esta razón, valdría la pena reconstruirla. Echa mano de consideraciones intencionales. En ella se cambia la interpretación de las conectivas lógicas y hay que elegir una topología específica.

El método parecía prometedor en lo que se refiere a la posibilidad de lograr también la independencia de CH. Pero Gödel empezó a sentir aversión por el trabajo y no quiso seguir con él. En primer lugar, en ese momento le parecía que podía hacerlo todo de veinte formas distintas y no estaba claro cuál era la mejor. En segundo lugar, en ese momento estaba más

---

axioma de elección) valen para él, y conjeturó que la hipótesis del continuo también ha de valer. El le contó estas cosas a v. Newmann durante su estancia en Princeton en el otoño de 1935. El descubrimiento de la prueba de esta conjetura sobre la base de su definición no es muy difícil. G no ofreció la prueba (también para la GCH) hasta tres años más tarde debido a que en el ínterin cayó enfermo. Esta prueba empleaba un submodelo de los conjuntos constructibles del caso numerable más bajo, similar al que comúnmente se da hoy.

[13] A juzgar por el Nachlass, G ha debido de confundir las fechas de los tres principales descubrimientos reseñados aquí: deben de ser 1941 (o 1942), 1941, 1942, en lugar de 1941, 1942 y 1943. Así por ejemplo, fue el 15 de abril de 1941 cuando dio su conferencia, ¿En qué sentido es constructiva la lógica intuicionista? (Según uno de los libros de notas, la idea de la prueba se le ocurrió al parecer el 1 de enero de 1941.) Aquí surge de nuevo la ambigüedad en torno a la cuestión de cuándo se considera asegurada una prueba cambiante.

interesado en la filosofía. Mirando hacia atrás con los resultados de Paul J. Cohen (1963) se ve claramente que el método permite establecer también la independencia de la hipótesis del continuo. El ahora lamenta no haber continuado el trabajo. Si hubiera continuado con él, es probable que hubiera llegado a la independencia de CH hacia 1950, con lo que el desarrollo de la teoría de conjuntos habría sido más rápido[14].

Empezó a interesarse por Leibniz y en especial por su característica universal y por la relación entre la filosofía kantiana y la teoría de la relatividad[15].

Gödel vivía cerca de Einstein y durante muchos años regresaron juntos a casa casi diariamente. Pero el interés de Gödel por la teoría de la relatividad surgió de su interés por la filosofía kantiana del espacio y el tiempo más que de sus charlas con Einstein[16].

Gödel trabajó en GTR entre 1947 y 1950 o 1951. Luego empleó un año en la preparación de su Gibbs Lecture[17].

Fue un motivo de gran preocupación para Gödel el haber accedido a escribir un ensayo sobre Carnap haciendo ver que la matemática no es

---

[14] Al parecer G no siguió mucho tiempo trabajando en tratar de aplicar su método a la hipótesis del continuo. Es probable que su ensayo filosófico sobre el problema del continuo (solicitado en 1945 y publicado a finales de 1947) se entendiera en parte como una especie de conclusión de su propio trabajo matemático sobre este problema. Podría interpretarse como un resumen de lo que pensaba sobre este problema y como una invitación a otros a continuarlo donde él lo había dejado. En cualquier caso, los datos de que ahora disponemos parecen indicar que a finales de 1942 se produjo una transición del interés de G por la lógica matemática a otro tipo de intereses teóricos, primordialmente filosóficos.

[15] El 9 de junio de 1976, G recordaba que en 1942 o 1943 había escrito su ensayo sobre la lógica matemática russelliana. El describió éste como una historia de la lógica en la que se hace especial referencia a la obra de Russell.

A juzgar por la respuesta de Russell a sus críticos (fechada en julio de 1943), parece probable que G escribiera su ensayo entre 1942 y 1943. La nota dice entre otras cosas, «El interesantísimo ensayo del Dr. Gödel sobre mi lógica matemática ha llegado a mis manos después de concluidas mis respuestas y en un momento en que ya no tenía tiempo para trabajar sobre él... Su gran capacidad, puesta de manifiesto en su labor anterior, me hace pensar que es sumamente probable que muchas de las críticas que me hace estén justificadas».

[16] En realidad G escribió diversos borradores de un artículo titulado «Algunas observaciones acerca de la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía kantiana». El ensayo publicado en el volumen de homenaje a Einstein fue terminado en 1949 pero habla mucho menos de filosofía kantiana. Es probable que el ensayo más largo se escribiera entre 1947 y 1950.

[17] La conferencia fue dada en Alumnae Hall, Pembroke College en la universidad de Brown, el 26 de diciembre de 1951, a las 8 p.m. Recuerdo a G leyendo a gran velocidad el manuscrito que incluía citas en francés de Hermite. G me contó algunas de las ideas de la conferencia, que se recogen en *PM* (p. 324).

pura sintaxis. Entre 1953 y 1955 o 1956 preparó diversas versiones, pero finalmente no publicó el ensayo porque cree que se podría hallar una refutación más convincente[18].

Gödel empezó a leer a Husserl en 1959.

En filosofía Gödel no ha llegado nunca a lo que buscaba: llegar a una nueva concepción del mundo, sus componentes básicos y las reglas de su composición. Varios filósofos, en especial Platón y Descartes, declaran haber tenido en cierto momento de sus vidas una idea intuitiva de este tipo, totalmente distinta de la idea cotidiana del mundo[19].

2.2. **Relación con el Círculo de Schlick**

Entre los papeles de G figura el borrador de una respuesta, con fecha de 12 de abril de 1972 [en la carpeta 01/105], a una carta de Karl Menger de 17 de enero de 1972, en la que se interesa por algunas de las conexiones de G con el «Círculo de Viena» y plantea dos preguntas concretas acerca de las relaciones de G con Wittgenstein. [La fecha del borrador de G también es interesante debido a que, a comienzos de 1972, le envié a G las notas de Moore sobre las clases impartidas por Wittgenstein entre 1930 y 1933 y G habló conmigo del trabajo de Wittgenstein en la sesión del 5 de abril de 1972 (véase el informe de las conversaciones en *CG* bajo esta fecha).] Parece que G no envió nunca la respuesta (al menos en la forma en que está en el borrador). Lo que sigue es una copia de alguna de las partes de este borrador preliminar.

[Recientemente me he enterado por la memoria de Menger de que G le envió una respuesta el 20 de mayo de 1972. Menger cita en concreto un pasaje que esencialmente es el (2) de más adelante, por lo que he revisado un poco el borrador de (2) para que concuerde con la versión de Menger.

Menger da también una útil información acerca del interés con-

---

[18] La primera invitación de P. A. Schilpp es del 15 de mayo de 1953. Para más detalles, véase el cap. 4, epígrafe *1954*.

[19] G creía que era probable que Husserl hubiese tenido una experiencia de revelación similar en algún momento comprendido entre 1906 y 1910.

En junio de 1976 G afirmó que su obra en el instituto se había repartido en tres frentes: el trabajo del instituto, las matemáticas y la filosofía. Fue muy concienzudo en su trabajo en el instituto, especialmente en lo referente a la evaluación de candidatos. Hassler Whitney habló de esto en su conferencia del 3 de marzo de 1978.

tinuo de G por la filosofía, especialmente en los años 30. Hablando del periodo comprendido entre 1929 y 1932, Menger escribe: «Además, en estos años G estudió mucha filosofía, entre otros temas, la metafísica alemana post-kantiana... Pero Gödel empezaba ya por aquel entonces a interesarse por Leibniz, por quien sentía una admiración sin límites.» En el contexto de la visita de G a Notre Dame, Menger señala, «Gödel tendía cada vez más al platonismo... Mientras tanto, nunca estuvo tan preocupado por Leibniz».]

No suelo responder a las cartas antes del plazo de una semana debido a mi usual cansancio. Pero en este caso concurría además una razón especial, a saber, que siempre he tenido mis reservas a la hora de hablar de mi relación con el Círculo de Viena, *debido a* que yo nunca he sido un positivista lógico en el sentido en el que este término se entiende normalmente y se explica en [el manifiesto de] 1929. En cambio algunas publicaciones (probablemente debido en parte a mis propios fallos) han contribuido a crear la impresión de que lo he sido.

Estoy seguro de que no entré en el Círculo antes del año académico 1925-1926 y muy probablemente tampoco antes del año civil 1926. Por otro lado, prácticamente no volví a asistir nunca a él a partir de la primavera de 1933. Asistí regularmente a las reuniones en el 26 y el 27. No recuerdo con qué frecuencia lo hice en el periodo 28-33... Sólo recuerdo unas pocas charlas celebradas en el Círculo. No hubo muchas que me interesaran realmente.

1) No he sido nunca presentado a Wittgenstein y nunca he cruzado una palabra con él. Sólo le he visto una vez en mi vida con motivo de su asistencia a una conferencia en Viena. Creo que era de Brouwer. [Probablemente, G se refiere a una titulada «Mathematik, Wissenschaft, und Sprache», impartida el 10 de marzo de 1928.]

2) Por lo que se refiere a mi teorema acerca de las proposiciones indecidibles, se desprende con toda claridad de los pasajes que usted cita [pp. 50-55 y 176 y sig.] que Wittgenstein no lo entendió (o fingió no entenderlo). Lo interpreta como si fuera una especie de paradoja lógica, cuando de hecho es precisamente lo contrario, a saber, un teorema matemático perteneciente a una parte absolutamente incontrovertida de la matemática (la teoría finitaria de números o combinatoria). El pasaje entero que usted cita me parece —dicho sea de pasada— un sinsentido. Repárese, por ejemplo, en el «supersticioso temor de los matemáticos a las contradicciones». [Contrástese esto con la nota 8 de la sección 2.4.]

De estos parágrafos parece colegirse que G se vio inducido a leer las observaciones de Wittgenstein sobre su teorema de incom-

pletud por la carta de Menger. También proporcionan algunos detalles acerca de la relación de G con el Círculo. En el capítulo 3 se habla de algunos de los contactos mantenidos por G con Hahn, Menger, Natkin y Feigl. Ocurre también que Carnap había tomado algunas notas de sus relaciones con G, notas que se guardan en la Universidad de Pittsburgh (bajo la custodia del Dr. Richard Nollan) con los papeles de Carnap *(CP)*. Se me ha dado amablemente permiso para citarlas, y me gustaría reseñar algunas de ellas para ilustrar la relación de G con algunos de los miembros del Círculo.

Las notas incluidas en *CP* constan de unas 50 páginas, de las que 37 corresponden al periodo comprendido entre marzo de 1931 y julio de 1933, ocupado en buena medida por los manuscritos de Carnap para su *Logical syntax*. Además, hay tres páginas del 14 de diciembre de 1928, 2 del lunes 23 de diciembre de 1929, 1 del 29 de junio de 1935, 3 del 13 y 14 de noviembre de 1940, y 2 del 26 de marzo de 1948. La mayoría de las páginas son notas acerca de lo que ha dicho G, salvo 3 cartas manuscritas de G (en total 8 páginas) y 3 páginas de respuestas de Carnap, todas ellas escritas en 1932.

1928. Carnap pregunta si en matemáticas sólo ha de desarrollarse aquella parte que se va a aplicar de hecho a la física (aunque admitiendo la posibilidad de ampliación por razones de simplicidad y unidad). En respuesta, G dice que hay que admitir también partes que nada tengan que ver con las aplicaciones, ya que —observa— nunca sabemos si algo podrá necesitarse en física algún día. Sobre otro tema dice G: «Si quiero seguir el punto de vista constructivista hasta el final, entonces tengo o bien que renunciar a la ley del tercero excluido (ya que no siempre es el caso de que sea demostrable o p o su negación) o bien que presuponer una lógica (decidible) "completa".»

1929. El diario de Carnap referente al 23 de diciembre registra el encuentro entre ellos en Arkadencafé de la 1 P.M. a las 9 P.M. El de Gödel, de las 5:45 P.M. a las 8:30 P.M. «Sobre la inagotabilidad de las matemáticas» (véase hoja independiente). (Para más detalles, véase el capítulo 3, epígrafe 1929.) La hoja independiente contiene un amplio informe de lo dicho por G:

Admitimos como matemática legítima ciertas reflexiones sobre la gramática de un lenguaje que concierne a lo empírico. Si uno trata de formalizar esta matemática, se encuentra con que en cada formalización se produ-

cen problemas que uno puede comprender y expresar en el lenguaje ordinario, pero no expresar en el lenguaje formalizado dado. De aquí se deduce (Brouwer) que la matemática es inagotable: uno siempre puede extraer algo nuevo de la «fuente de intuición». No hay, por tanto, ninguna *characteristica universalis* para el *conjunto* de la matemática, ni tampoco ningún procedimiento de decisión para toda ella. En todos y cada uno de los *lenguajes cerrados* hay sólo una cantidad numerable de expresiones. El *continuo* sólo aparece en «el conjunto de la matemática»... Si no tenemos más que un solo lenguaje, y sólo podemos hacer «elucidaciones» sobre él, entonces esas elucidaciones son inagotables, siempre requieren alguna intuición nueva. [En contraposición con estas observaciones, el teorema de incompletud de G logra la tarea adicional de matizar algunas de las ideas expresadas aquí al conseguir proposiciones *dentro* del sistema formal dado, que están más allá de él en lo que respecta a su *demostrabilidad.*]

Del material de entre 1931 y 1933 (y también de la página de 1935) no haré comentarios detallados sobre textos concretos (la mayoría de ellos relativos a la labor de Carnap con vistas a su *Logical Syntax*), textos que encierran un gran interés para los estudiosos de la obra de Carnap. Me limitaré a seleccionar algunos items que son menos dependientes de contextos específicos.

1931. El 10 de junio G hizo algunas observaciones similares a lo que me confesó en los años 70. Es arbitrario el punto en el que uno quiera poner el límite: 1) sólo las proposiciones concretas, 2) las variables numéricas y la inducción matemática, 3) Hilbert (en metamatemática), 4) Brouwer, 5) la matemática clásica. Qué fórmulas y reglas admitir (en matemáticas) como «significativas» en primer término, a causa de ciertas ideas que se asocian con ellas, es enteramente un asunto de libre resolución. Uno puede por tanto admitir igualmente toda la matemática clásica. No hay ninguna frontera (Unterschied) plausible, aun cuando se pueda señalar un límite bien definido en distintos lugares.

El 2 de julio de 1931 G probó «en círculo» que la verdad aritmética no es definible (en la aritmética). «Hay en la metalógica aritmetizada conceptos ordinarios que no son definibles. Esto se demuestra derivando una contradicción (siguiendo a Richard) de la suposición de que se cuenta con el concepto; en el argumento tenemos que dar por supuesta la consistencia de la aritmética. La Zahlformel verdadera (sin variable) no es definible.» G pasa luego a dar detalles de la prueba que son similares a los ofrecidos en la carta de 21 de setiembre de 1931 a Zermelo (para más detalles, véase cap. 3, epígrafe

1931). Como es natural, *CP* incluye una extensa cita de esta carta, seguida de la nota de Carnap a propósito de lo que G le dijo el 26 de marzo de 1932 de que la antinomia no aparece, debido a que «verdadero» no se puede definir. [Tal vez Carnap olvidó (o no comprendió) sus primeras notas y le preguntó acerca de ello a G, que le mostró entonces a Carnap una copia de la carta.]

1932. En una carta con fecha de 11 de abril, G vuelve sobre el manuscrito de Carnap «Metalogik I» y sobre un manuscrito de L. Chwistek que a G le había parecido «tan vago en su forma» que no podía evaluarlo. La larga carta del 11 de septiembre está fundamentalmente dedicada a hacer comentarios sobre el manuscrito de Carnap «Semantik», señalando errores en su definición de «analítico» y en su exposición de la prueba de incompletud. G dice que la dificultad que presenta la definición de «analítico» sólo se puede evitar recurriendo a un lenguaje que contenga ya los conceptos de conjunto (y relación), y que en la II parte de su famoso ensayo él ya intentó dar una definición de «verdadero» siguiendo esta línea. Carnap escribe de nuevo el 25 y 27 de septiembre proponiendo una corrección. G responde el 28 de noviembre diciendo que Carnap ha entendido la sugerencia que le ha hecho y que el interés de una definición así no reside en la clarificación del concepto de «analítico» (dado que en ella se emplean los conceptos igualmente problemáticos de «conjunto arbitrario», etc.), sino en mostrar que las proposiciones indecidibles en un sistema de tipo jerárquico pueden decidirse pasando a un tipo superior. G dice también que está ocupado con el «Bericht über die Grundlagungforschung» [presumiblemente el libro que proyectaba hacer juntamente con A. Heyting]. También dice algo acerca del Círculo: «El Círculo de Schlick se ha reunido de nuevo, mas no para proseguir la discusión con Waismann, sino para informar sobre Ramsey, etc.» Carnap llegó a Viena en diciembre y se reunió con Gödel los días 8 y 13. Las notas contienen la siguiente afirmación. «Gödel: Ja; er hat mir vor einigen Jahren betont, dass nicht-konstituerbare Begriffe nötig sind.» [Tomo esto como un indicio de que Carnap a menudo no entendía lo que G le decía.]

1933 y 1935. Hay seis páginas de julio de 1933 y una del 29 de junio de 1935. Reseño algunas de las observaciones de G tal y como fueron formuladas por Carnap (1). La teología parte de conceptos indefinidos: «man hei gegenseitiger Verständigung immer vom Definiten ausgehen muss; aber auch er will selbstverständlich indefi-

nite Begriffe verwenden» (2). Las leyes naturales y las proposiciones (generales) concretas aceptadas son similares. No hay *ninguna* demarcación formal entre leyes como «todos los cuervos son negros» y leyes como la de Maxwell (3). La sinonimia sólo se da cuando las partes de una sentencia con idéntico contenido se pueden intercambiar siempre; esto se satisface en los lenguajes extensionales, pero no siempre en un lenguaje intensional (4). «"Gehalt" kann f-Begriff sein da dieser Begriff etwas *objektives* an sich hat. Der Unterschied ist eben der: die a-Begriffe sind *subjektive*, d. h. bei diesen besteht die Möglichkeit der Feststellung, bei den f-Begriffen nicht.» [Las dos últimas sentencias yo creo que se refieren a la distinción entre d-términos y c-términos establecida por Carnap en la sección 34a de su *Logical Syntax.*]

1940. El 13 de noviembre G discutió con Carnap su idea favorita de una teoría metafísica que trate de conceptos como Dios, alma, «Ideen»; estas notas se consideran en la sección 8.1. El 14 de noviembre G dio una conferencia sobre la hipótesis del continuo y Carnap anotó a continuación algunas de sus propias ideas.

1948. G considera que hay una estrecha analogía entre la física teórica y la teoría de conjuntos. La física es confirmada por las percepciones sensoriales; la teoría de conjuntos por sus consecuencias en la aritmética elemental. Las ideas fundamentales de la aritmética no susceptibles de ser reducidas a ninguna cosa más simple, son análogas a las percepciones sensoriales. G considera también algunas ideas de Leibniz; esta parte se analiza en la sección 6.2.

No tengo noticia de ulteriores interacciones entre G y Carnap, aun cuando Carnap estuvo en el I.A.S. entre 1952 y 1954, y G empezó a trabajar en su ensayo sobre Carnap en 1953.

2.3. **La espectacular respuesta a Hilbert**

El trabajo desarrollado por Hilbert de 1900 en adelante culminó en cuatro problemas básicos que él expuso en septiembre de 1928 ante una audiencia internacional. En dos años G resolvió todos ellos de una forma definitiva y sorprendente. Este es probablemente, en muchos respectos, un suceso único en la historia de la ciencia. Esta sección se dedica a narrar esta espectacular historia.

2.3.1. *El transfondo histórico: Hilbert y la teoría de la demostración*

En 1900 Hilbert desvió su atención de los fundamentos de la geometría para centrarse en la búsqueda de un sistema axiomático para el análisis, apartándose del usual modo genético de enfocar el estudio del concepto de número (real) (en «Über den Zahlenbegriff»). La consistencia de un sistema así figura, en efecto, como el segundo problema de la lista de su conferencia de París de ese mismo año. Los axiomas de Hilbert caracterizan los números reales como formando un campo arquimédeo real que no permite ulterior extensión a ningún campo del mismo tipo.

El requisito de no extendibilidad se ofrece en un destacado axioma de completud que, sin embargo, tiene una estructura lógica compleja y no deja de ser un tanto ambiguo. Como ahora sabemos, esta cuestión de cierre o completud requiere ir más allá de los sistemas formales incluso cuando consideramos el caso más simple de los enteros. Dicho en términos actuales, sólo los axiomas de Peano de segundo orden son completos; los de primer orden para los enteros son incompletables. Es interesante ver que Hilbert pasó enseguida a relacionar la cuestión de cerrar axiomáticamente la teoría de los enteros con la del ámbito indeterminado de lo que constituye la lógica.

En 1901 dio una conferencia en la Sociedad Matemática de Göttingen sobre los problemas de completud y decisión (de lo verdadero o falso por medio de los axiomas). En palabras de E. Husserl, Hilbert se preguntó (*Philosophie der Arithmetik,* Husserliana, 1970, p. 445), «¿Tendría derecho a decir que toda proposición que no trata más que de enteros positivos ha de ser verdadera o falsa sobre la base de los axiomas para los enteros positivos?». «Cuando afirmamos que una proposición se decide sobre la base de los axiomas de un dominio, ¿qué podemos usar para ello aparte de los axiomas? El conjunto de la lógica, ¿qué es eso?. Todos los teoremas que están desprovistos de cualquier peculiaridad de un dominio de conocimiento, lo que vale con independencia de todos los "axiomas específicos", de todo contenido de conocimiento. Pero llegamos así a la necesidad de fijar un límite: ¿en el dominio de la lógica algorítmica? ¿en el de los cardinales finitos? ¿en la teoría de las combinaciones? ¿en la teoría general de los números ordinales? Y por último, ¿no es acaso puramente lógica la sin duda más rica teoría de conjuntos?»

He citado este pasaje por extenso porque es relevante por ciertos debates actuales, especialmente los relacionados con el ámbito de la lógica. Tiendo a pensar con Dedekind y Hilbert (y G) que la lógica incluye la teoría de conjuntos. Si nos servimos de este concepto de lógica, entonces estamos justificados para aceptar el conocido argumento tendente a probar que los axiomas de Peano son categóricos. De donde se deduce que cada proposición se «decide» por los axiomas (i. e., como o bien verdadera o bien falsa). Pero esta decidibilidad o determinación se diferencia del requisito más estricto de que haya un algoritmo que resuelva el problema en cada caso. Es esta decidibilidad más estricta la noción que hoy nos resulta familiar y también muy probablemente lo que Hilbert buscaba. Pero de lo que más se ocupó Hilbert fue de las pruebas de consistencia; luego venía la completud, que para él era probablemente un requisito en general más débil que la decidibilidad.

En su conferencia de Heidelberg de 1904 sobre los fundamentos de la lógica y la aritmética, Hilbert observó por primera vez que, mientras que uno puede probar la consistencia de la geometría mediante una interpretación aritmética, por lo que a la consistencia de la aritmética se refiere (entendiendo por tal análisis y teoría de números) «el recurso a otra disciplina fundamental no parece razonable». El sugirió un plan consistente en construir la lógica y la aritmética a la vez, así como la idea de traducir las pruebas al lenguaje de fórmulas (de lógica simbólica), convirtiendo con ello la prueba de consistencia (la prueba de la «existencia del infinito») en un problema de aritmética elemental. Probablemente por falta de buenas ideas y debido a su interés por otras materias (especialmente las ecuaciones integrales y la física), Hilbert no volvió nunca a ocuparse de este campo hasta su conferencia de Zurich de 1917 sobre pensamiento axiomático, en la que se refirió a la «axiomatización de la lógica» llevada a cabo por Whitehead y Russell como la «coronación de todo el trabajo de axiomatización». Naturalmente, seguía pendiente para Hilbert la cuestión de probar la consistencia, y propuso convertir en objeto de estudio el concepto mismo de prueba matemática.

No fue sino después de 1920 cuando Hilbert, en colaboración con Paul Bernays y provocado por la oposición de Weyl y Brouwer, empezó a concentrarse en la teoría de la demostración. De los frutos de esta labor se informó en la primera conferencia de Hamburgo, de 1922, en la de Leipzig de 1922, en la de Münster de 1925 so-

bre el continuo, y en la segunda de Hamburgo de 1927. Entre tanto, aparte de Bernays, otros jóvenes matemáticos, especialmente M. Schönfinkel, W. Ackerman, y J. v. Neumann, se unieron también a la excitante empresa. Por 1928 se creía que la consistencia de la teoría de números había sido lograda por el método finitista considerado por Hilbert (y Bernays), y que incluso se había completado, en líneas generales, una prueba similar de la consistencia del análisis; sólo quedaba pendiente «la prueba de un teorema de finitud puramente aritmético».

2.3.2. *La lista hilbertiana de problemas*

El 3 de septiembre de 1928, Hilbert leyó la ponencia «Problems der Grundegung der Matematik» y «recibió un cerrado aplauso tanto al comienzo como al final de la misma» [*Atti del Congresso Internationale dei Mathematici, Bologna 3-10 de septiembre de 1928,* Bologna, 1929, vol. I, pp. 135-141; *Math Annalen,* vol. 102 (1930), pp. 1-9; *Grundlagen der Geometrie,* séptima edición, 1930, Anhang X; K. Reidemeister, *Hilbert Gedenkband,* 1971, pp. 9-19].

Hilbert inició su ponencia pasando revista a los avances obtenidos en matemáticas en los diez años anteriores a 1928 y luego anunció que el trabajo de Ackermann y v. Neumann había desembocado en una prueba (finitista) de consistencia de la teoría de números. A continuación, reseñó cuatro problemas que aún quedaban pendientes de resolver.

Problema 1. Prueba de consistencia (finitista) de la parte básica del análisis (o cálculo funcional de segundo orden). Hilbert declaró que Ackermann ya había elaborado la parte principal de esta prueba; sólo quedaba por establecer una condición de finitud elemental. Señaló que la prueba justificaría la teoría de los números reales con las cortaduras de Dedekind, los axiomas de Peano de segundo orden y la teoría cantoriana de la segunda clase de números.

Problema 2. Extensión de la prueba a los cálculos funcionales de orden superior (o de la parte de la teoría simple de tipos a tres o cuatro o cinco niveles). Hilbert mencionó en conexión con este problema el problema adicional de probar la consistencia de un axioma de elección más fuerte, toda vez que su formulación incluye cierta forma del axioma de elección como parte integrante del sistema básico. Es interesante señalar que Hilbert no menciona explícitamente la teoría de conjuntos completa, sino que

se limitó a lo que ahora no consideraríamos sino pequeños fragmentos de la teoría de conjuntos suficientes para el desarrollo de la matemática estándar (de 1928).

Problema 3. La completud de los sistemas axiomáticos para el análisis y la teoría de números. Hilbert hizo hincapié en el conocido hecho de que las teorías de segundo orden son completas en ambos casos sobre la base de las pruebas usuales de que son categóricas. El problema estriba en hacer «finitamente rigurosas» las pruebas de categoricidad. Por lo que a la teoría de números se refiere, Hilbert desarrolló su idea estableciendo el requisito de que la prueba de isomorfismo de dos modelos sea «finitamente refundida» con el fin de mostrar que siempre que se pueda mostrar que una proposición A es consistente con los axiomas, la opuesta de A no se pueda mostrar que lo sea. En otras palabras, siempre que A es consistente con los axiomas, es demostrable. Esto parece ser algo más específico que la conocida idea de explicitar más los axiomas de segundo orden a fin de obtener sistemas axiomáticos «formales». En cualquier caso, Hilbert parece creer en esta época que existen tales sistemas formales completos.

Hilbert no mencionó la cuestión de la decibilidad del análisis y la teoría de números. Ahora estamos ya familiarizados con la observación hecha por Turing de que si un sistema fomal es completo en el sentido antes mencionado, también es decidible. Si Hilbert hubiese sabido en esta época de esta conexión, probablemente hubiese sido más escéptico en lo referente a la existencia de sistemas formales completos en ambos casos, ya que cabe presumir que habría tenido más dudas acerca de la decidibilidad de tales teorías. Pero estoy tan sólo conjeturando ya que no he investigado los datos históricos acerca de las creencias que Hilbert tenía en ese momento acerca de estas cuestiones de la completud y la decidibilidad. (Véase, no obstante, el epígrafe 1930 del capítulo 3 para ver una afirmación hecha por Bernays en 1930 en el sentido de que la decidibilidad es más fuerte que la completud.)

Problema 4. El problema de la completud del sistema de reglas lógicas (es decir, de la lógica de primer orden) en el sentido de que todas las sentencias (universalmente) válidas son demostrables. Hilbert presentó éste como un ejemplo de problema puramente lógico que cae bajo su teoría de la demostración. Este mismo problema se mencionaba también en la primera edición del texto de Hilbert-Ackermann de 1928.

Hilbert no se refirió en su lista al Entscheidungsproblem (para la lógica de primer orden), que era, naturalmente, un problema central en su escuela, salvo para mencionar que, en lo que respecta a la teoría de la cuantificación monádica, el conocido método de resolución del Entscheidungsproblem (el problema de la eliminación de Schröder) conllevaba también una prueba de la completud de las

reglas en el subdominio. Es probable que Hilbert no incluyera ni éste ni el problema de la decisión para la teoría de números porque no los consideraba pertenecientes a su teoría de la demostración.

2.3.3. *La respuesta de Gödel*

G solucionó, en el verano de 1929, el problema 4, probando la completud de la lógica de primer orden. En 1930, su intento de probar la consistencia (relativa) del análisis (para la teoría de números) le llevó incidentalmente a su descubrimiento de las proposiciones indecidibles. Tras un mes o dos, se dio cuenta de que su resultado implicaba también una respuesta negativa al problema inicial de probar la consistencia (no sólo del análisis sino también de la teoría de números). Esta inesperada y gratificadora sucesión de pasos ilustra un importante fenómeno que se produce en los descubrimientos científicos y que, a falta de término más apropiado, propongo denominar «transmutación de problemas». De modo más explícito, hay cinco pasos en esta sucesión concreta. 1) G dividió el difícil problema de probar la consistencia del análisis por métodos finitistas en dos. 2) Optó por abordar primero el más concreto de la consistencia relativa. 3) Observó que la verdad en teoría de números no es definible en teoría de números. 4) Halló las proposiciones indecidibles considerando la demostrabilidad (formal) en lugar de la verdad. 5) Por último, se dio cuenta de que la afirmación de consistencia es ella misma también una proposición indecidible. Asombrosamente, su decisión de abordar la mitad del problema 1 le llevó sin esfuerzo a dar respuesta a tres problemas (1, 2, 3), pero con respuestas contrarias a lo que Hilbert esperaba. (Para más detalles de los resultados y ensayos de G en conexión con los problemas de Hilbert, véanse los capítulos 6 y 10.)

Tengo la impresión de que, de acuerdo con el consenso de hoy, la teoría finitista de números, tal como originariamente la ideó Hilbertϕ, consiste básicamente en la teoría cuantificacionalmente libre de las funciones recursivas primitivas. Es sobre la base de una identificación más o menos como ésta como podemos decir sin ambigüedad que los resultados de G dieron solución a los problemas de Hilbert.

G halló enseguida que la verdad en la teoría de números no se puede definir en dicha teoría de números, independientemente de

los sistemas axiomáticos formales concretos de la misma. A continuación, fue capaz de formular proposiciones en segmentos elementales de teoría de tipos o de teoría de conjuntos que no son decidibles en ellas. Tras anunciar el resultado en el congreso celebrado en Königsberg en septiembre, lo mejoró obteniendo elegantes proposiciones aritméticas que son indecidibles en el sistema formal dado, y descubriendo también que, por lo que se refiere a los sistemas conocidos de la teoría de números y de la teoría de conjuntos, no puede haber una prueba de consistencia de ninguno de esos sistemas que sea formalizable en el propio sistema. Por lo que, como el método finitista tal como había sido explicado por Hilbert ha de ser formalizable en esos sistemas, G no sólo había respondido negativamente a los problemas 1 y 2 de Hilbert, sino que también había refutado la creencia hilbertiana en que ya se había hallado una prueba finitista de la consistencia de la teoría de números. Además, también había respondido negativamente al problema 3 de Hilbert. En todos estos casos, G demostró que las pruebas finitistas y los sistemas formales completos por los que se pregunta en estas cuestiones sencillamente no pueden existir.

En la primavera de 1961 tuve la oportunidad de ir con un amigo a visitar a L. E. J. Brouwer a su casa (sin invitación, como era costumbre en él). Estuvo sumamente locuaz y habló de diversos temas aparentemente al azar. Recuerdo la mención que hizo, por razones totalmente distintas en cada caso, de Huygens, Hadamard, Heyting y Gödel. Respecto de los resultados de incompletud de éste, expresó su asombro de que se les hubiera dado tanta importancia, y dijo que esas conclusiones eran ya claras para él mucho antes de 1931. Naturalmente, la diferencia fundamental estriba en la proeza de reforzar la idea de la incompletud construyendo proposiciones indecidibles dentro de un sistema formal dado. Las precisas formulaciones de G fueron convincentes para gente de muy distintas creencias, mientras que las convicciones de Brouwer se basaban en un conglomerado de ideas expresadas de forma mucho menos explícita y homogénea. Por otro lado, las amplias implicaciones de los resultados de G sólo pueden negarse desde un punto de vista enormemente específico que la mayoría de los matemáticos y filósofos encontrarían sumamente arbitrario y unilateral.

Aunque no parece descabellado decir que G destruyó el programa original de Hilbert, G siguió no obstante interesándose por el problema subyacente de la evidencia matemática y buscando un

modo natural de ampliar los restrictivos requisitos de Hilbert. En 1932 G presentó un informe estableciendo que la teoría clásica de números es tan consistente como la intuicionista (observación que también habían hecho de forma independiente Bernays y G. Gentzen). En 1941, G halló una interpretación de la teoría intuicionista de números mediante funcionales recursivos primitivos que fueron tomados por él como una extensión del método finitista de Hilbert.

Otra «transmutación» de problemas e ideas se halla en relación con el problema del continuo. En 1976 G creía que había sido en 1930 cuando empezó a pensar en el problema del continuo y oyó hablar de la propuesta de Hilbert de demostración de la hipótesis del continuo en la teoría axiomática de conjuntos tal como fue presentada en la conferencia de 1925 «Sobre el infinito». La idea de Hilbert estribaba precisamente en construir ordinales (recursivos) y en emplear conjuntos recursivamente definidos y funciones de órdenes que llevan por índice tales ordinales. En coherencia con su creencia en que existen pruebas finitistas de consistencia para sistemas fuertes, Hilbert creía y pensaba que podía probar que éstos agotaban todos los ordinales y todos los conjuntos de enteros. De ahí que, como no es difícil ver y probar en teoría de conjuntos que las cardinalidades de esos ordinales y de esos conjuntos son las mismas, creyera que tenía (el esbozo de) una prueba de la hipótesis del continuo en teoría de conjuntos. Además, Hilbert pensaba que los axiomas de la teoría de conjuntos son también verdaderos en su interpretación constructivista dentro de la misma línea. Esta es la razón por la que creía que tenía también (el esbozo de) una prueba finitista de la consistencia de los axiomas de la teoría de conjuntos (tal como se la conocía entonces).

G se sirvió de la idea de descomponer conjuntos (de enteros) en órdenes con ordinales como índices. En lugar de emplear conjuntos recursivamente definidos, pronto pensó en los conjuntos definibles de primer orden de la jerarquía ramificada. Durante algún tiempo, ensayó los diferentes modos de introducir ordinales (numerables). Por último se le ocurrió la idea de usar todos los ordinales. Esto implica que, en lugar de probar la hipótesis del continuo, sólo cabía esperar una prueba de consistencia relativa, salvo que hubiera algún modo explícito adecuado de obtener todos los ordinales. En 1976 G creía que había sido en 1935 cuando verificó que todos los axiomas de la teoría de conjuntos de ese momento, incluido el axioma

de elección, son satisfechos por los conjuntos constructibles, i. e., la teoría ramificada sobre la totalidad de los ordinales. En 1937 o 1938 (véase la nota 11 a la sección 2.1) probó que la hipótesis generalizada del continuo también vale en este modelo.

2.4. Algunas comparaciones con Wittgenstein

Wittgenstein (1889-1951) era diecisiete años mayor que G. Por lo que a su obra principal se refiere, también cabe distinguir dos periodos: de 1908 o 1912 a 1918 y de 1929 a 1951. Una división similar para G sería: periodo de lógica matemática de 1929 a 1939 o 1942 y de filosofía de 1943 a 1972 o 1978. El último periodo se puede subdividir en filosofía de la matemática y de la física (1943-1958) y filosofía general (1959-1978). Previamente, Wittgenstein pasó por una etapa de búsqueda (1906-1912) y G por una etapa de preparación (1924-1929).

«En la vida de Wittgenstein, la etapa que media entre 1906 y 1912 fue una etapa de angustiosa búsqueda y encuentro final de su vocación.» En su juventud leyó *Die Welt als Wille und Vorstellung* de Schopenhauer y estudió ingeniería entre 1906 y 1911[1]. A comienzos de 1912 fue a Cambridge. «Al término de su primera estancia en Cambridge vino a mí y me dijo», cuenta Bertrand Russell, «si soy un perfecto idiota, me convertiré en ingeniero, y si no, me haré filósofo». Es imposible determinar si el que exageró fue Wittgenstein o fue Russell, pero hay una cosa que está clara: la cuestión mundana de ganarse la vida no desempeñó papel alguno en las deliberaciones de Wittgenstein acerca de su propia vocación. La buena posición de la familia debe haber contribuido a esta situación. «Una mañana de domingo de 1910, en Manchester, decidió, por ejemplo, que le gustaría ir a Blackpool.» Tras ser disuadido por su amigo W. Eccles de la idea de alquilar un tren especial, «tomaron un taxi hasta Liverpool, una distancia de unas cuarenta millas, e hicieron una excur-

[1] La biografía autorizada es *Sketch* de G. H. v. Wright, publicada por primera vez en 1954 y recogida en su *Wittgenstein* (1982). Salvo que se indique lo contrario, los detalles biográficos se extraerán de este Sketch (brevemente, S); la cita de aquí está tomada de las pp. 17-18.

sión en el ferry de Mersey antes de regresar a Manchester». Más tarde, decidió vivir de forma muy sencilla y frugal[2].

La carrera filosófica de Wittgenstein ha sido contada muchas veces. El periodo que arranca de 1908 (véase *BA*, p. 237) o 1912 culmina en la terminación, en agosto de 1918, del *Tractatus*, que apareció en forma de libro en 1922. «El autor del *Tractatus* creyó haber resuelto todos los problemas filosóficos. Lo coherente con esta tesis, era abandonar la filosofía» (S, p. 24). Se cuenta que después de escuchar la conferencia de Brouwer, se sintió impulsado a retomar la filosofía de nuevo. En enero de 1929 regresó a Cambridge y empezó a desarrollar su filosofía última, la cual parece haberle ocupado más o menos continuamente hasta su muerte en 1951. El otro único libro que él se propuso en serio publicar fue terminado en enero de 1945 y publicado en 1953 como I parte de sus *Philosophical Investigations*.

Ni G ni Wittgenstein publicaron mucho durante su vida. Lo que publicaron es breve y rico en contenido así como en implicaciones. Desde la muerte de Wittgenstein en 1951, no han dejado de crecer ni las publicaciones de sus manuscritos y notas de clase ni los análisis de su figura. Como es natural, los resultados publicados por G se hallan incluidos en lugar destacado en todos los libros de texto de lógica. Es demasiado pronto para predecir lo que ocurrirá con su Nachlass andando el tiempo. Una diferencia crucial es que G no dio tantas clases y que la mayor parte de su trabajo no publicado sólo se halla en forma de notas desmañadas (y buena parte de él en taquigrafía Gabelsberger).

Tanto G como Wittgenstein alcanzaron pronto altos niveles de preparación intelectual y fueron meticulosos en la preparación de sus escritos para su publicación. A diferencia de la mayoría de los filósofos y matemáticos en ejercicio, uno y otro se afanaron únicamente por conseguir avances básicos. Sin embargo, lo que consiguieron es muy distinto. Por lo que se refiere a su primera obra, este contraste no es difícil de percibir, por cuanto que mientras que lo conseguido por G es claro y definitivo, el *Tractatus* es radical, sugestivo, y está sujeto a revisiones drásticas. Dicho en términos más generales, G aspiraba a conseguir conocimiento nuevo, no meramente «lo que es posible antes de todos los descubrimientos e invencio-

[2] K. T. Fann (editor), *Wittgenstein: The Man and His Philosophy*, 1967, páginas 31-32 y 86.

nes nuevos» (*Investigations,* & 126). A G le preocupaba la precisión conceptual (desechando con frecuencia la elegancia literaria) y la eliminación de la multiplicidad de significados, aun cuando los lectores de sus obras filosóficas no dejen de ver en ellas interpretaciones alternativas. En contra de esto, v. Wright, comentando la obra de Wittgenstein, ofrece la opinión de que «lo que hace de la obra de un hombre un *clásico* es precisamente esta multiplicidad, que incita y a la vez ofrece resistencia a nuestra ansia de comprender claramente» (S, p. 34). Una mente menos refinada se sentiría inclinada a tomar por una forma de engaño esta «incitación y resistencia». ¿O es el ansia lo que está fuera de lugar y merece castigo? Tal vez la idea sea más bien que, cuando de cuestiones perennes se trata, un tratamiento serio conlleva inevitablemente esta multiplicidad que acompaña a un clásico, aunque no lo convierte en tal.

Lo que me contó en las charlas que mantuvimos entre 1971 y 1972, G lo veía como *aplicaciones* de su filosofía. En la última etapa, le pedí que me diera una interpretación general de su filosofía en forma como de clases particulares. En respuesta, me dijo que sólo había desarrollado su filosofía hasta el extremo de ser capaz de aplicarla, pero que no había llegado al estadio de darle una formulación directa. La distinción entre formulación y aplicación de su filosofía me sugiere una conexión con el último Wittgenstein. Comparados con los libros normales de filosofía, los últimos escritos de Wittgenstein parecen ser a lo sumo aplicaciones de una filosofía que requiere una formulación más sencilla. Por otro lado, si uno está de acuerdo con Wittgenstein, se podría decir que G debiera haberse conformado con exponer su filosofía ofreciendo simplemente aplicaciones típicas de la misma. Me parece que, según Wittgenstein, esta es la forma apropiada de exponer una filosofía.

Tanto G como Wittgenstein estuvieron estrechamente relacionados con Viena, teniendo ambos un segundo centro de actividad, Princeton en un caso y Cambridge (Inglaterra) en el otro. Entre 1924 y 1939 G vivió principalmente en Viena. En este periodo Wittgenstein pasó también mucho tiempo en Viena y en todo caso en Austria. En conjunto, Wittgenstein viajó mucho, a Noruega, a Irlanda, a Rusia (en 1935), a América (en 1949) y, naturalmente, entre Cambridge y Viena. En contraposición, entre enero de 1940 y su muerte 38 años más tarde, G vivió y trabajó en Princeton durante todo el tiempo (salvo brevísimos viajes).

Esta común conexión con Viena y su común interés por la filo-

sofía (y, en especial, por la filosofía de la lógica y de la matemática) proporcionan un sistema de coordenadas para contrastar sus diferentes perspectivas y tipos de trabajo. Además, ambos reaccionaron ante la obra de Cantor, Frege, Hilbert, Russell y Brouwer, pero de modo totalmente distinto. Las confrontaciones directas entre sus obras son un tanto limitadas. Las únicas que conozco son la discusión de Wittgenstein del teorema de incompletud de G y las observaciones hechas en privado por éste sobre la obra de aquél. Confrontaciones indirectas más sustanciales tal vez sean sus contactos con el Círculo de Viena, así como sus respectivas ideas acerca de él, y las reacciones ante el *Tractatus* de F. P. Ramsey, cuyos intereses se solapan con los de los dos. A. M. Turing resulta menos adecuado, pese a que existe un informe de sus discusiones con Wittgenstein y a que G y él sentían un mutuo aprecio por sus respectivas obras. La razón es que él nunca se tomó tan en serio como Ramsey la obra de Wittgenstein.

En cuanto a los autores y amigos de los que se dice que han influido positiva y negativamente en Wittgenstein, ahora contamos con una larga lista, en la que figuran S. Agustín, el Dr. Samuel Johnson, Pascal, G. C. Lichtenberg, Kant, Kierkegaard, Schopenhauer, Dostoievsky, Tolstoy, Otto Weininger, Karl Kraus, Adolf Loos, Heinrich Hertz, Fritz Mauthner, Ludwig Boltzmann, Frege, Russell, G. E. Moore, Cantor, Hilbert, Brouwer, Ramsey, P. Sraffa, etc. Naturalmente, no es fácil determinar con precisión en qué medida estos contactos, su entorno familiar, y la sociedad «kakania» de la decadente Viena de los Habsburgos[4] se entremezclaron condicio-

[3] Sobre el tema de Wittgenstein y Rusia, hay un artículo de John Moran en *New Left Review,* núm. 73, 1972, pp. 83-96. Entre las cartas de Wittgenstein a Paul Engelmann (publicadas de 1967), encontramos una de septiembre de 1922 en la que dice, «La idea de una posible escapada a Rusia de la que hablamos no deja de obsesionarme» (p. 53). Y de nuevo, en junio de 1937, «Ahora estoy en Inglaterra por poco tiempo; tal vez vaya a Rusia. Dios sabe lo que será de mí» (p. 59). Hay amplia información de que en 1935 Wittgenstein «planeó establecerse en la Unión Soviética». En cualquier caso, es bien sabido que sentía una gran repulsión hacia la propiedad privada y que creía fervientemente en la dignidad del trabajo manual.

[4] Véase, por ejemplo, la *Memoir* de Engelmann, 1967; C. A. van Peursen, *Wittgenstein,* 1963 y 1969; K. T. Fann, *Wittgenstein's Concepción of Philosophy,* 1969; A. Janik y S. Toulmin, *Wittgenstein's Viena,* 1973; R. Rhees (editor), *Recollections of Wittgenstein,* 1984; para información sobre el término «kakania», véase Janik y Toulmin. Otros libros sobre Wittgenstein son N. Malcolm, *A Memoir,* 1958 y 1984; y B. McGuinness (editor), *Wittgenstein and His Times,* 1982.

nando su trabajo y perspectiva general. Pero una cosa parece clara: la cultura intelectual y artística de Viena ejerció mucha mayor influencia en la obra de Wittgenstein que en la de G.

Al igual que Kant, Wittgenstein trata de establecer una línea divisoria entre sentido y sinsentido. En el *Tractatus* se establece una clara distinción entre el mundo como idea (lo expresable y sus aledaños) y el mundo como voluntad (el resto, o lo no expresable, incluido lo «más alto»). La preocupación por el lenguaje y su pureza es compartida con F. Mauthner y K. Kraus. Cuando la corrupción del lenguaje desempeña un papel importante en el predominio de fraude, es natural tratar de hallar una fortaleza donde sentirse seguro, por mucho que pueda quedar fuera. Pero cuando lo «más alto» es dejado fuera, uno se ve llevado a la paradójica conclusión de que el sinsentido es más importante que el sentido. «El lenguaje, según Mauthner, es un instrumento defectuoso para adquirir conocimiento, una escalera que hay que desechar después de haberla empleado.» Un modo de actuar más consistente parece que sería desechar el sinsentido (como hizo el Círculo de Viena) o tratar de construir una fortaleza más grande (como hizo G). El aparato lógico desarrollado por Frege y Russell es usado en el *Tractatus* principalmente para argüir *a priori* que tiene que haber *Elementarsätze* (proposiciones atómicas)[5].

Su posición cambiante a partir de 1929 coloca en primer plano la «tendencia pragmatista» de Ramsey y comparte la problematización de la cuestión de Moore. Sin embargo, a diferencia de éste, Wittgenstein no se conforma con reducir al silencio a sus adversarios apelando al sentido (uso) común, sino que explora la «gramática» para «disolver» los problemas confusos.

Las *Investigaciones* emplean los sugestivos términos de «juegos de lenguaje», «aires de familia», y «formas de vida». También consideran, sobre todo en relación con el papel que desempeñan las definiciones nuevas, el fenómeno del «ver como» en el que tanto insistieron los psicólogos de la Gestalt. «Formas de vida» era un término familiar. Había un libro muy popular, titulado *Lebensformen* (1914),

---

[5] La comparación con Kant se establece en D. Pears, *Wittgenstein*, 1971. La influencia de Mauthner y Krauss se analiza con todo detalle en Janik y Toulmin. La frase citada sobre Mauthner procede de v. Peursen, p. 26. Hay diversos libros sobre el *Tractatus*, entre los que se incluyen uno de E. Stenius de 1960 y otro de G.E.M. Amscombe, de 1959 y 1963.

de W. Spranger, y el teólogo H. Scholz (que más tarde se dedicó a la lógica simbólica), en su *Religionphilosophie* (1921) relacionó las formas de vida con diferenciaciones de la conciencia religiosa. Respecto de la cuestión de cómo es posible la matemática, Wittgenstein rechaza el crudo «convencionalismo» y explica el acuerdo en matemáticas por medio del acuerdo en lo que se refiere a formas de vida. «Lo que ha de aceptarse, lo dado, no es —por así decir— sino las *formas de vida*» (*Investigaciones,* p. 226).

Wittgenstein destaca el uso del lenguaje en la «corriente vital». Hay, sin embargo, una ligera ambigüedad que deja cabida a la parcialidad. «Cuando los filósofos usan un término», dice, «y tratan de captar la *esencia* de la cosa, uno debe preguntarse siempre a sí mismo: ¿se usa siempre el término del modo del juego de lenguaje que constituye su habitat original? Lo que hacemos es retrotraer los términos de su uso metafísico a su uso cotidiano» (*Investigaciones* & 116). Por ejemplo, «infinito» es un término frecuentemente usado por los matemáticos; ¿forma parte del uso cotidiano? ¿O más bien podemos negar que su juego de lenguaje sea el hábitat original de términos como «infinito»? Si no podemos negar esto, entonces buena parte de lo que Wittgenstein dice de las matemáticas viola su propio mandato.

Algunos de nuestros conceptos cotidianos son los más básicos. G simpatiza con la propuesta husserliana de buscar un fundamento más profundo para la ciencia por medio de la contemplación de tales conceptos. En este enfoque, los conceptos de los matemáticos no se desechan, sino que han de ser en cierto modo reconstruidos. De ahí que el desacuerdo no estribe en la importancia de los conceptos cotidianos, sino en que Wittgenstein considera sinsentidos algunos conceptos claros, como por ejemplo, el de verdad aritmética.

Cuando se pasa a su reacción ante los mismos matemáticos, el contraste entre G y Wittgenstein es verdaderamente notable. Wittgenstein ve la obra realizada por Cantor en teoría de conjuntos y sobre todo cómo se la interpreta como una trampa. Así, según él, el procedimiento diagonal no muestra que los números reales sean no numerables, ya que no hay una cosa que sea el *conjunto* de los números reales. G en cambio, enriquece y clarifica el concepto cantoriano de conjunto, mostrando también que es consistente decir que los números reales son el conjunto no denumerable más pequeño. De hecho, ampliando la teoría de conjuntos, G llega a un extenso do-

minio de la lógica que transforma significativamente la cuestión del puesto de la lógica en el pensamiento, tal y como es abordada en el *Tractatus*.

Hilbert introdujo un programa consistente en afianzar los argumentos transfinitos probando que no pueden llevar a contradicciones. De 1929 en adelante, Wittgenstein discute una y otra vez el tema de las contradicciones y de las pruebas de consistencia, pero no me resulta fácil formarme una idea coherente de buena parte de lo que dijo. G, en cambio, muestra que el tipo de prueba de consistencia tras el que Hilbert anda, sencillamente no existe.

Las reacciones ante las ideas de L. E. J. Brouwer son menos desiguales. G demostró que la lógica clásica se puede reinterpretar dentro de la lógica de Brouwer cuando se aplica a números naturales, y que la lógica de Brouwer se puede interpretar a su vez mediante construcciones más transparentes. Wittgenstein, por su parte, está de acuerdo con la interpretación constructivista que Brouwer hace de las conectivas lógicas, pero además introduce una especie de antropomorfismo que exige que las pruebas sean analizables o perspicuas[6]. Esto tiene que ver con el descubrimiento y la comunicación de una prueba. Parece plausible que, a menos que una prueba se haya aceptado, no se la da por comprendida ni el teorema por establecido. Pero la cuestión no es tan sencilla. Así por ejemplo, hace poco se ha obtenido con ayuda de computadores una «prueba» del teorema de los cuatro colores. Es tan larga que nadie la ha comprobado, y sin embargo, generalmente se acepta que el teorema está establecido[7].

Sobre el cambio y estabilidad de conceptos se proponen tesis extremas. Así por ejemplo, Wittgenstein dice en varios lugares que una prueba crea un nuevo concepto. Desde Hegel estamos familiarizados con la idea de que los conceptos cambian y de que las contradicciones son la fuerza motriz del desarrollo de los mismos. De hecho, si uno tiene algo nuevo que decir, con frecuencia emplea pa-

---

[6] Por ejemplo, *Remarks on Foundations of Mathematics*, 1956, II 11, «Decir de una serie sin fin que no contiene un esquema concreto sólo tiene sentido en condiciones muy especiales», etc.; II 2, «Quiero decir: si uno tiene un esquema de demostración inaceptable y mediante un cambio de notación lo transforma en otro aceptable, entonces uno está originando una demostración donde antes no había ninguna». Consúltese también *Survey*, pp. 39-41, y *MP*, capítulo 7.

[7] Una amplia discusión de algunas de las cuestiones involucradas se hallará en T. Tymoczko, *Journal of Philosophy*, vol. 76 (1979), pp. 57-83.

labras viejas de un modo nuevo. En todos estos casos nos enfrentamos con el antiguo problema de que, en la forma en que el lenguaje suele usarse, cuando tiene lugar un cambio, se siente la necesidad de un sustrato estable. G tiene una idea muy distinta del asunto. Para él, no son los conceptos los que cambian, sino más bien nuestra forma de percibirlos. «Si no hay nada claro de lo que partir, es difícil ver cómo, en muchos casos, un concepto vago puede determinar unívocamente uno definido sin la *más insignificante* libertad de opción.» «Tratar de ver (*i.e.*, de comprender) un concepto más claramente» es el modo correcto de expresar el fenómeno vagamente descrito con la expresión de «examinar lo que entendemos por un término» (*MP*, p. 85).

En sus últimos escritos, Wittgenstein es menos explícito que en el *Tractatus* acerca de lo que considera que es el dominio de la lógica y de las matemáticas. En conjunto, el deseo de escapar de la confusión se manifiesta en la demanda de conexiones directas con imágenes pictóricas y aplicaciones en términos de acción o de conducta. Así por ejemplo, las pruebas por él consideradas son o bien cálculos numéricos o algo que funciona como una imagen, o bien pruebas artificiales formalizadas, de las que es enormemente crítico. El tipo de pensamiento conceptual sostenido en pruebas matemáticas significativas se deja fuera probablemente con el fin de evitar la creación de mitos. En concreto, sólo resulta aceptable lo potencialmente infinito, de suerte que la proposición «El mayor de todos los enteros positivos no existe» es para él sumamente específica y está en el límite de nuestro pensamiento. Para ilustrar su perspectiva general, vamos a examinar más detenidamente su análisis del teorema de G[8].

[8] *Remarks on Foundations of Mathematics*, 1956, y edición ampliada, 1978. La parte sobre el teorema de G se incluye en la edición original como apéndice I a la parte I (pp. 49-54, escritas hacia 1937-38), más V 18-19 (pp. 176-177, escritas en 1941) y como apéndice III a la parte I (pp. 116-123) más VII 21-22 (pp. 385-389) en la edición revisada. Se ha conservado una larga carta a Schlick de julio de 1935 sobre el teorema de G. Para críticas de la edición de 1956, consúltense los artículos de P. Bernays y A. R. Anderson incluidos en BP. Según F. L. Goodstein, Wittgenstein, en 1935, llegó a comprender mejor el teorema de G e hizo la correcta observación siguiente acerca de él: muestra «que la noción de cardinal finito no puede expresarse en un sistema axiomático y que las variables numéricas formales tienen necesariamente que tomar otros valores distintos de los números naturales» (*Mind*, vol. 66, 1957, pp. 549-553). Las referencias a este libro se harán todas a la edición

Para cada uno de los sistemas formales de una amplia clase S (tales como la aritmética de Peano de primer orden), G construye una sentencia P que es verdadera pero no demostrable en el sistema S. Respecto de fórmulas numéricas tales como $2 + 3 = 5$, $2 \times 3 > 5$, tenemos una idea clara de cuáles son verdaderas y cuáles falsas. Wittgenstein no pone esto en entredicho. La sentencia P trasciende enunciados simples como F(n) mediante una generalización, siendo fundamentalmente de la forma «Para todo entorno positivo *n*», *F(n)*. G muestra que cada uno de los *F(1)*, *F(2)*, etc., es demostrable en S y, en consecuencia verdadero, pero P misma no es demostrable en S. Ahora resulta evidente que, como F(1), F(2), etc. son todos verdaderos, P es verdadera por el significado de «todo *n*». Este, sin embargo, es el paso fundamental que Wittgenstein no está dispuesto a suscribir. La objeción presumiblemente es que estamos tomando la colección infinita de enteros positivos, esto es *F(1)*, *F(2)*, etc., como un todo acabado (más que potencial). La prueba supone la consistencia del sistema S, supuesto que todo el mundo da por sentado y que nadie pone en entredicho cuando S no es sino la aritmética de Peano. Pero, sin venir mucho a cuento en este contexto, Wittgenstein se descuelga con su dicterio favorito: «el supersticioso temor y pavor de los matemáticos ante las contradicciones» (*Remarks*, p. 53).

Wittgenstein parece tener poco aprecio por la autonomía de las matemáticas, a las que tacha con demasiada ligereza de construcciones vacías por no estar directamente conectadas con aplicaciones cotidianas. El tratamiento que hace de las matemáticas ilustra una tendencia general a asimilar las matemáticas y la ciencia directamente al discurso cotidiano. Para citar a Bernays, «Todo nuestro análisis, con sus aplicaciones a la física y a la tecnología, se basa en la infinitud de la serie numérica. La teoría de la probabilidad y la estadística hacen continuamente un uso implícito de esta infinitud. Wittgenstein arguye como si la matemática existiera casi únicamente para los fines de la economía doméstica» (BP, p. 522). Desde luego, las creencias de la vida diaria están llenas de contradicciones, no sólo entre las de distintos individuos y grupos, sino incluso dentro de un mismo individuo[9]. Pero la matemática se diferencia de (o es

---

de 1956. Respecto de su idea del lugar especial que tiene la proposición «el entero mayor no existe». Véase la página 57 hacia la mitad.

[9] Para una amplia discusión de esta cuestión mantenida con Turing en 1939,

un tipo muy especial de) discurso diario, y el requisito de estar libre de contradicción es uno de sus rasgos distintivos. Muchos matemáticos no están interesados en la formalización totalmente explícita, pero esto no quiere decir que no les molesten las contradicciones.

Ni G ni Wittgenstein dicen mucho en sus filosofías de los problemas morales, sociales y políticos, pero por razones distintas. Mientras que Wittgenstein cree que no se puede decir nada general acerca de tales problemas, G parece creer que una vez que se llegue a la teoría básica correcta, el resto se seguirá como aplicaciones, comparables a las de la física a la ingeniería.

En 1972, G hizo algunos comentarios sobre Carnap y Wittgenstein. Dijo que la última obra de Wittgenstein suponía, comparada con la primera, un paso atrás. G siguió creyendo a través de los años que la lógica matemática es util para la filosofía por cuanto que hace a ésta más precisa y más asequible a los no especialmente capacitados. El creía que Carnap había hecho un mal uso del lenguaje simbólico, y que había pretendido desacreditar a la lógica matemática en tanto que instrumento y destruir la filosofía. G destacó en especial la importancia de la lógica matemática para el método axiomático, que es su método predilecto para caracterizar conceptos tanto de la ciencia como de la filosofía.

Es evidente que cuanto más se expande el ámbito de la lógica, más se puede hacer con ella. Tradicionalmente, los sistemas axiomáticos de ramas científicas concretas suelen dejar fuera la lógica debido en parte a que se cree que se halla incluida implícitamente. De ahí que, a medida que cambiamos el dominio de la lógica, figurativamente, el mismo sistema axiomático se va enriqueciendo con una lógica subyacente más rica. ¿No podría ocurrir que el mal uso que Carnap hace de la lógica (como, por ejemplo, la excesiva rigidez formal) no fuera en parte sino un resultado de la posesión de una excesivamente estrecha noción de lógica?

En filosofía, hallar el «comienzo» adecuado es mucho más difícil que en otras materias. En las situaciones más simples, uno suele creer que, con la suficiente perseverancia, un territorio puede ser recorrido sea cual sea el punto en el que se ha iniciado el viaje. Nos parece un hecho que en filosofía este proceso es, hasta cierto punto, irreversible. Así por ejemplo, G y Wittgenstein optaron por dife-

---

véase *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, ed. de C. Diamond, 1976, pp. 211-220.

rentes comienzos y recorrieron diferentes terrenos. De hecho, cada persona nace en medio de ciertas circunstancias específicas de suerte que la elección o la secuencia de elecciones que pueden hacerse se halla enormemente limitada. G insiste repetidamente en la importancia de superar los prejuicios, y cree que una de las tareas más importantes es liberarse de los malos efectos de una educación claramente negativa. Así por ejemplo, para las generaciones que han crecido con la televisión, es una tarea muy ardua sacudirse la enorme cantidad de prejuicios adquiridos por este medio.

Tanto G como Wittgenstein insisten en el análisis (conceptual), aunque lo entienden de modo radicalmente distinto. Por otra parte, ambos están de acuerdo con Ramsey en que «la filosofía debe ser de alguna utilidad y debemos tomárnosla en serio», mas el tipo de utilidad considerado por Wittgenstein probablemente no hubiera sido del agrado de Ramsey, el cual, aunque impresionado por el uso efectivo que G dice haber hecho de la filosofía, también se habría cansado de esperar por la dudosa realización de la filosofía como una ciencia rigurosa.

Es bien sabido que Ramsey estuvo durante varios años muy impresionado por el *Tractatus*. Por las obras de Ramsey podemos ver que poco a poco se fue apartando de la posición mantenida en esta obra. En un ensayo de 1927 sugiere[10] que las proposiciones atómicas *(Elementarsätze)* pueden ser relativas a un lenguaje y que es preciso llenar una laguna del *Tractatus* con una especie de «pragmatismo». «Yo creo que la esencia del pragmatismo no es sino la siguiente, que el significado de una sentencia ha de definirse por referencia a las acciones a que llevaría su aserción o, de un modo más vago todavía, por sus posibles causas y efectos.»

En el verano de 1929, el desacuerdo de Ramsey con Wittgenstein se hace muy grande. En sus reflexiones sobre la naturaleza de la filosofía, escritas en esta época, formula tres críticas distintas contra el modo en que Wittgenstein enfoca ésta[11]. 1) Wittgenstein no usa de un modo claro su noción de «lo dado». 2) El escolasticismo trata lo que es vago como si fuera preciso y trata de adecuarlo a una categoría lógica exacta. «Un ejemplo típico de escolasticismo lo constituye la tesis de Wittgenstein de que todas nuestras proposiciones cotidianas están del todo en regla y que es imposible pensar ilógica-

[10] Recogido en sus *Foundations of Mathematics*, 1931, véase p. 155.
[11] *Ibíd.*, pp. 269 y 263.

mente» 3) Ramsey cree que la filosofía debe ser de alguna utilidad y que debe clarificar nuestros pensamientos y nuestras acciones. De lo contrario, no se trata sino de una disposición que tenemos al control y la filosofía sería un sinsentido. «Pero entonces tenemos que tomarnos en serio que es un sinsentido, y no pretender, como hace Wittgenstein, que es un sinsentido importante.» Esto lo decía en el momento en que Wittgenstein estaba empezando a cambiar hacia sus últimas tesis. No está claro cuántos de tales comentarios consideraría Ramsey aplicables también a ellas.

Es evidente que G tuvo más intereses en común con Ramsey. Por ejemplo, en una colección de cartas de Wittgenstein a C. K. Ogden, editadas en 1973 por G. H. v. Wright, se hallan incluidas también varias cartas interesantes de Ramsey. Pues bien, hay un par de ítems que indican algunos de estos intereses comunes. En una carta de diciembre de 1923, Ramsey dice que ha estado tratando de decidir la hipótesis del continuo, pero que no ha tenido éxito. En otra de febrero de 1924 comenta negativamente el nuevo material introducido por Russell en la segunda edición de *PM,* arguyendo que todo lo que hay allí no es sino una nueva prueba más ingeniosa de la inducción matemática. En realidad, como señala G (BP, p. 226), la prueba está equivocada. Por lo demás, como ahora sabemos, es demostrablemente imposible probar la conclusión a partir de esos axiomas.

Capítulo 3

UNA RELACION CRONOLOGICA: EUROPA CENTRAL (1906-1939)

En los últimos años ha proliferado mucho la literatura sobre la vida de G y no cabe duda de que en los próximos años aparecerá mucho más material. Yo quisiera reunir una selección de hechos basada en lo que tengo a mi alcance. En general, no daré las fuentes salvo en el caso de citas o ítems no directamente disponibles de otro modo.

1906

Kurt Friedrich Gödel nació el 28 de abril de 1906 en el 5 Bäckergasse (ahora Pekarsa) y fue bautizado en la congregación luterana germana de Brünn en Moravia [véase su Taufschein (partida de bautismo)]. Brünn era (y Brno es) la ciudad más importante de Moravia y hacía mucho tiempo que era un importante centro textil. Gregor Mendel (1822-1884) pasó la mayor parte de sus años activos allí. Su población era predominantemente checa, con una importante minoría de habla alemana, a la que pertenecían los padres de G.

Según WS, entre otros famosos de Brünn figuran Ernst Mach, Thomas Masaryk, el inventor Viktor Kaplan, el escritor Ernst Weistz, los arquitectos Adolf Loos y Joseff Hoffman, Bruno

Kreisky (canciller de Austria entre 1970 y 1983), el tenor Leo Slezak, y el artista de cabaret Fritz Grünbaum.

Su padre Rudolf (28 de febrero de 1874-23 de febrero de 1929), cuya familia (de católicos viejos) había llegado de Viena, era un hombre activo, creativo (en el campo textil) y un hombre que se hizo a sí mismo. Era director y co-propietario de la factoría textil Friedrich Redlich. (Redlich era el abuelo de G, del que presumiblemente se tomó la mitad del nombre de éste. G no usó esta mitad de su nombre en sus publicaciones y prescindió oficialmente de ella cuando se hizo ciudadano americano en 1948. Pero la inicial F. sobrevive en la lápida de su tumba.) Más tarde (antes del comienzo de la I Guerra Mundial) adquirió para la familia una preciosa villa en 8A Spilberggasse (ahora Pollikova), en la que G creció. En 1955, próximo a cumplir los 55, Rudolf falleció inesperadamente de un doloroso absceso de próstata. Dejó a su familia en una situación financiera confortable; antes de su muerte, la familia «tirando a rica» se había visto poco afectada por la I Guerra Mundial y por la inflación que siguió.

La madre de G, Marianne (31 de agosto de 1879-23 de julio de 1966) era luterana, recibió una amplia educación literaria (en parte en la escuela francesa de Brünn) y tuvo múltiples intereses culturales. (Su padre Gustav Handschuh había sido un pobre tejedor en el Rhineland antes de trasladarse a Brünn a trabajar como «Einzelprokurist der Firma Schoeller».) También fue ama de casa competente e imaginativa, a la que sus dos hijos estuvieron muy vinculados. Tras la muerte de su marido en 1929, se trasladó a Viena a vivir con sus hijos. En esta época, su otro hijo Rudolf (nacido en 1902), ya era un radiólogo establecido (que sobrevivió a G y no se casó nunca). Ella siguió en Viena hasta 1937, en que regresó a la villa de Brünn. En 1944 volvió a reunirse con su hijo mayor en Viena (donde residió el resto de su vida). Con posterioridad, visitó, acompañada de Rudolf, a G y a su mujer varias veces en Princeton. (Casualmente, había nacido el mismo año que Einstein.)

El padre de G era católico solo formalmente y de G se dice que tuvo durante toda su vida una gran aversión hacia la Iglesia Católica. La familia de G cultivó su legado nacional alemán. G no fue nunca miembro de ninguna congregación religiosa, aunque era creyente: *«teísta,* no panteísta (siguiendo a Leibniz más que a Spinoza)» *(CG).* En enero de 1978, la esposa de G me contó que éste leía la Biblia los domingos en la cama.

1911

Según el hermano de G, Rudolf (véase RG), «Mi hermano era un niño alegre. A los cinco años tuvo una ligera neurosis de ansiedad, que más tarde desapareció por completo.

»Nosotros (mi hermano y yo) vivíamos con nuestros padres en Brünn en una villa con un hermoso jardín. [Se refiere a la residencia situada en 8A Spilberggasse, adquirida por el padre de G cuando éste era muy joven.] El tenía poco interés por nuestro bello jardín, mientras que yo disfrutaba trabajando en él.»

1914

G asistió a la escuela elemental (la Evangelische Volkschule de Brünn) durante cuatro años (1912-1916).

Durante este tiempo, padeció en cierta ocasión un doloroso ataque de fiebre reumática. En 1976, G me contó que fue cuando tenía ocho o nueve años. También me dijo que, como consecuencia de ello, su corazón era débil. Su tarjeta escolar registra unas cuantas faltas justificadas así como permisos para no participar en los ejercicios de educación física durante los años 1915-16 y 1917-18. El primero de estos dos periodos me parece que apoya la conjetura de que la enfermedad importante tuvo lugar a los nueve años. Su hermano cree que este episodio es el causante de la preocupación que G tuvo durante toda su vida por su salud, preocupación que raya en la hipocondria.

G es recordado como un niño generalmente feliz pero más bien tímido y susceptible, que solía disgustarse cuando perdía jugando o cuando su madre salía de casa; también era un niño inquisitivo, al que la familia llamaba *der Herr Warum* (El Sr. Por qué) (Kreisel, pp. 152-153).

RG: «Hacia los ocho años mi hermano padeció un serio reumatismo articulatorio con fiebre alta y a partir de entonces se volvió un poco hipocondríaco, imaginándose que tenía un problema de corazón, tesis que, sin embargo, nunca fue médicamente establecida.»

1916

G asistió a la escuela secundaria durante 1916-1924 (*Staatsrealgymnasium in Brünn mit deutscher Unterrichtssprache*).

En la escuela tenía fama de no haber cometido nunca ningún error en gramática latina; se conservan algunos de sus meticulosos deberes de geometría. Sus dibujos geométricos presentan un aspecto inmaculado. Los certificados escolares tanto de la escuela primaria como de la secundaria están en el Nachlass. Sólo una vez tuvo una calificación por debajo de la máxima, ¡y ésta en matemáticas! El curriculum de esa época hacía mucho hincapié en la ciencia y en las lenguas. El latín y el francés eran obligatorios. G eligió como optativas la taquigrafía y el inglés (y no el checo). [La biblioteca de su propiedad contiene diccionarios de muchas lenguas (y también un libro de gramática china). Hay cuadernos de vocabulario y de ejercicios no sólo de inglés y latín, sino también de italiano y holandés.] Además de sobresalir en matemáticas y latín, destacó también en teología; en la última parte de su vida anotó en sus cuadernos muchas ideas teológicas así como detalles de la historia de la iglesia.

G leyó también una gran cantidad de cosas al margen, haciendo uso probablemente de la biblioteca del instituto técnico (en la Elisabetheplatz de Brünn) y, para la educación cultural, de la biblioteca privada de su madre.

Según algunos informes, cuando todavía estaba en la escuela sintió un interés romántico por un amigo de la familia diez años mayor que él, amistad a la que sus padres opusieron fuertes objeciones que dieron sus frutos (WS y Kreisel, p. 153).

RG: «Desde los diez años le gustaba jugar al ajedrez y se sentía muy contento cuando ganaba y muy desgraciado y contrariado cuando perdía, cosa que raramente sucedía.»

Entre 1919 y 1921 tomó clases de taquigrafía, aprendiendo el método Gabelsberger que usa en muchos de sus cuadernos.

[El sistema de taquigrafía fue diseñado por Franz Xaber Gabelsberger. Este, junto con la escritura de Stolze-Schrey, fueron los dos sistemas alemanes competitivos de taquigrafía más ampliamente usados durante las primeras décadas de este siglo. Al final los dos sistemas se fusionaron para formar el Einheitskurzschrift, y ahora hay muy poca gente que conozca alguno de los dos viejos sistemas. Entre otros usuarios del sistema Gabelsberger figuran E. Husserl, E. Schrödinger, y E. Zermelo (véase Dawson, 1984).]

1920

Rudolf, el hermano de G, marchó a la Universidad de Viena para estudiar medicina. De la primera parte de la vida de G, escribió en RG:

Era una vida familiar armoniosa. Mi hermano y yo nos llevábamos muy bien entre nosotros y también con nuestros padres.

Jugábamos casi siempre entre nosotros y teníamos pocos amigos. Nuestro juego era tranquilo: jugábamos con piezas de construcción, trenes, y en la I guerra Mundial, como es natural, también con soldados.

Mi hermano fue un alumno que destacó primero en idiomas, luego en historia y más tarde se interesó por las matemáticas. En las clases de latín obtenía siempre la calificación más alta. A los dieciséis y diecisiete años estaba en matemáticas muy por delante de sus compañeros de clase y dominaba ya el material universitario.

Tenía una relación especialmente buena con su madre, la cual tocaba a menudo al piano sus melodías favoritas (música ligera). Cuando yo salía de paseo con mis padres, él solía preferir quedarse en casa con un libro.

1921

Hacia 1975 G anotó que su interés por las matemáticas se inició a los 15 (o 14) años, estimulado por un libro de introducción al cálculo de la colección Göschen.

En relación con esto, puede tener interés comparar a G con Einstein (1879-1955). Según su hermano, G había aprendido por su cuenta una gran cantidad de matemáticas antes de entrar en la universidad. Del estudio autodidacta de Einstein y de sus estímulos extracurriculares se tienen más datos. Su tío Jakob Einstein le planteaba problemas matemáticos. De 1889 a 1894 Max Talmud (que más tarde cambió a Talmey), entonces un joven estudiante de medicina, visitaba regularmente la casa de la familia (en Munich) y se tomó gran interés en el desarrollo intelectual de Einstein. Sus impresiones de Einstein y su interacción con él se hallan recogidas en su libro *The Relativity Theory Simplified and the Formative Years of Its Inventor* (1932).

El se dio cuenta de la especial inclinación de Einstein hacia la física y le proporcionó material de lectura adecuado. Especialmen-

te, el *Popular Books on Physical Science* de A. Bernstein «que describe los fenómenos físicos de una manera lúcida y atractiva, ejerció una gran influencia sobre Albert, y aumentó considerablemente su interés por la ciencia física». Poco después Einstein empezó a mostrar afición por las matemáticas y Talmud le dio un libro de texto de geometría que se leyó en pocos meses. «A partir de entonces se dedicó a la más elevada matemática, estudiándolo todo por su cuenta» y logrando pronto un nivel tan alto que Talmud «ya no pudo seguirle». «Desde entonces, la filosofía se convirtió en un tema frecuente de conversación entre nosotros», recomendándole la lectura de Kant, el cual «se convirtió en el filósofo favorito de Einstein después de haber leído su *Crítica de la razón pura* así como las obras de otros filósofos» (para más detalles, consúltese Clark, pp. 33-34, y Pais, pp. 37-38).

G parece que no tuvo un interés temprano comparable por la física ni un conocimiento avanzado de la misma; probablemente, G estudió en cambio más historia, idiomas y teología. Mientras que Einstein se limitó a cumplir en la escuela, G se acercó a la perfección en el trabajo que le pedían. Es evidente que ambos tenían energía y capacidad muy por encima de lo necesario para ser buenos estudiantes. Como la matemática es más autosuficiente que la física, es más fácil de estudiar por cuenta propia. Aunque ambos eran excepcionalmente brillantes e inquisitivos, la feliz combinación de estímulos externos y audacia que se dio en Einstein es probable que haya servido para reforzar su inclinación hacia la física y para hacer que lograra un buen dominio del tema a tan temprana edad.

«Yo llegué», escribe Einstein en su autobiografía, «a una religiosidad profunda que, sin embargo, tuvo un abrupto final a los doce años. A través de la lectura de libros científicos populares, enseguida llegué a la convicción de que mucho de lo que contaban las historias de la Biblia no podía ser verdad». No sé si G pasó por una experiencia similar. En cualquier caso, lo normal entre los europeos serios de su tiempo era aferrarse a la religión en su juventud. Como observa Freud, «¿No es cierto acaso que los dos puntos principales en el programa educativo de los niños de hoy son la postergación del desarrollo sexual y una influencia religiosa prematura?» (*El futuro de una ilusión,* 1927). Por ejemplo Russell (1872-1970), según su propio testimonio, «empezó a pensar en problemas filosóficos a los quince años», descartando primero el libre albedrío, luego la inmortalidad y, por último, a Dios (consúltese *BA,* p. 59). Husserl

(1859-1938) «confesaba que a la edad de 13 o 14 años había estado profundamente dedicado a cuestiones religiosas», tales como la existencia de Dios (Karl Schuhmann, *Husserl-Chronik*, 1913, p. 3). Aunque no tengo una idea clara de lo que G quiere dar a entender describiéndose a sí mismo como un teísta, creo que difiere de estos cuatro interesantes (también para él) pensadores mencionados, que son tenidos por ateos de una u otra clase.

G leyó en Marienbad el libro de Chamberlain sobre Goethe, según carta de él mismo de agosto de 1946 («hace ahora exactamente 25 años», véase *LM*). «Este libro significó también el inicio de mi preocupación por la Farbenlehre de Goethe y su disputa con Newton, que indirectamente contribuyó también a mi elección de vocación. Este es el extraordinario modo en que los hilos se van entretejiendo a través de la vida de uno, pero que uno no descubre hasta que se hace más viejo.» El 11 de agosto de 1986, Rudolf, el hermano de G, me contó que de su estudio G había sacado una conclusión favorable a la postura de Newton (sobre la de Goethe).

1922

G leyó por primera vez (algunas de) las obras de Kant. G afirma también en *GQ* que de los autores de la lista de Grandjean, sólo la obra de Kant había sido importante para su desarrollo.

G me contó que los tres filósofos con los que más congeniaba eran Platón, Leibniz y Husserl. También me dijo que había empezado a leer a Husserl en 1959. Según *GQ*, estudió minuciosamente a Leibniz entre 1943 y 1946. También confiesa en *GQ* que Leibniz ejerció una gran influencia sobre él, pero no en lo que escribió. Según Menger, ya estaba muy interesado en Leibniz en los años treinta.

Tanto G como Einstein hicieron contribuciones científicas de gran interés filosófico. Aunque ambos tenían interés por la filosofía y la conocían bien, a diferencia de Einstein que siempre colocó la física en el centro de su actividad investigadora, G se dedicó a la filosofía durante amplios periodos de su vida. Una razón tal vez sea que Einstein creía que existía una distinción tajante entre la ciencia y la filosofía y tenía menos confianza en que alguien pudiera lograr resultados suficientemente concretos en filosofía. Así por ejemplo, Maurice Solovine, en su carta del 14 de abril de 1952 a C. Seelig,

hablando de su primera visita a Einstein (en la primavera de 1902), escribe «Me confió que también a él le gustaba mucho la filosofía, cuando era joven, pero que la vaguedad y arbitrariedad predominantes en ella le habían predispuesto en su contra, y que por eso ahora sólo se ocupaba de física» (Clark, p. 79).

En su *Reality and Scientific Truth* (1980), Ilse Rosenthal Schneider cita unos cuantos comentarios de Einstein sobre la filosofía. «¿No parece toda la filosofía como si estuviera escrita en miel? A primera vista todo es maravilloso. Pero cuando miras de nuevo se ha evaporado todo. Sólo queda una masa viscosa» (p. 90). «La muy elogiada tesis kantiana sobre el tiempo me recuerda el cuento de Andersen de las ropas nuevas del emperador, sólo que la forma de la intuición toma el lugar de las ropas del emperador» (p. 84). «Kant es como una especie de carretera con cientos y cientos de mojones kilométricos. Todos los perritos vienen y hacen sus necesidades en los mojones. Respondiendo a su pretendida indignación, Einstein, riendo estrepitosamente, observó, "pero, ¿qué quiere? Su Kant es después de todo la carretera, la cual es para aguantar"» (p. 90). El 3 de febrero de 1947, Einstein escribió, «Mi amigo de aquí, el conocido lógico matemático Kurt Gödel, tras de mucho esfuerzo, ha conseguido por fin y estudiado su libro sobre las relaciones de la obra de Kant con la teoría de la relatividad» (*Das Raum-Zeit-Problem bei Kant und Einstein,* 1921) (p. 86). Es probable que fuera en esta época cuando G empezó a escribir su ensayo «Algunas observaciones sobre las relaciones entre la teoría de la relatividad y la filosofía kantiana» (carpetas 04/129-134 del Nachlass).

1924

Después de graduarse en el Gymnasium de Brno, G fue a Viena para estudiar física teórica en la universidad, que por aquel entonces ocupaba un lugar destacado. Como joven con talento de una acomodada familia, estaba en condiciones inmejorables para sacar partido de las ricas ofertas. Entre los cursos que siguió en la universidad, a mí sólo me mencionó las clases de Furtwängler sobre teoría de números, que le gustaron mucho, y las clases de filosofía de Gompertz. Estas últimas versaron sobre historia de la filosofía europea. Philip Furtwängler estaba paralítico del cuello para abajo, era primo del famoso director de orquesta Wilhelm Furtwängler, y

uno de los fundadores de la teoría del campo de clases. Otros profesores de G fueron Hans Hahn, M. Schlick, y Hans Thirring.

G confesaba en *GQ* que con anterioridad a su ingreso en la universidad de Viena no tenía más contacto con la vida cultural e intelectual de Viena que a través del periódico *Die neue freie Presse.*

RG: «A los dieciocho años vino a estudiar a la Universidad de Viena en la que yo llevaba cuatro años estudiando medicina. Vivíamos juntos como estudiantes, cada uno en su habitación, pero pasábamos poco tiempo juntos porque él iba a la universidad y yo al hospital; a veces me hablaba de su profesión. Más tarde, cuando él ya estaba en Princeton, supe por conocidos (!) que era un hombre importante en su campo.

Nuestros padres venían con frecuencia a Viena a visitarnos y solíamos ir al teatro (el Max Reinhardt's Josefstädter Theater), por el que mi hermano sentía un gran interés.»

Del 8 de octubre de 1924 al 8 de abril de 1927, G vivió en Florianigasse 42/II/16, según el padrón de Viena (según me contó E. Köhler).

1925

G confesaba en *GQ* que él era «un realista conceptual y matemático desde 1925». Parece sumamente probable que la filosofía haya acaparado buena parte de la atención de G desde sus días de estudiante. Es presumible que este interés haya sido tenido en suspenso en el periodo que va de 1928 a 1939 o 1942, periodo en que se concentró en la lógica matemática. Sin embargo, según Menger, G estudió mucha filosofía también en la década de los treinta. También escribió mucho en sus cuadernos filosóficos entre 1940 y 1942.

En el Nachlass de G hay dos cuadernos (03/72.5 y 03/72.6) sobre el curso «Historia de la filosofía europea» de Gompertz, con los marbetes «Invierno 1925» y «1926». Es probable, pues, que G haya estudiado filosofía en 1925 y que el estudio tal vez le haya ayudado a cristalizar su postura «realista» hacia 1925.

Olga Taussky [Todd] (1906-) entró en la universidad de Viena en 1925 y conoció a G en su primer año de estudios. Ha escrito algunos recuerdos que cubren fundamentalmente el periodo comprendido entre 1925 y 1934 (véanse sus «Remembrances of Kurt Gödel»). En 1925-1926 G y ella asistieron al seminario de

Schlick sobre filosofía de la matemática en donde se estudiaba la *Introduction to Mathematical Philosophy* de Russell. Al final de la segunda reunión, Schlick pidió dos veces algún voluntario para intervenir en la sesión siguiente, y entonces G se ofreció.

Según ella, «G tenía debilidad por los miembros del sexo opuesto, hecho que nunca ocultó». Cuenta haber visto a G con una chica muy joven que más tarde «se quejó de que Kurt estuviera tan mimado, durmiera hasta tan entrada la mañana, etc. Al parecer estaba interesada en él y quería erradicar sus hábitos de prima donna».

G «tenía buena preparación en todas las ramas de la matemática y uno podía hablarle de cualquier problema y recibir una excelente respuesta... Hablaba lentamente y con mucha calma y su mente era muy clara. Pero uno también podía hablarle de otras cosas y su mente clara hacía de ello un exquisito placer. No me extraña que Einstein tuviera tantas conversaciones con él».

En una ocasión, G «señaló que yo [Taussky] le incluía entre las *minores gentium*. Este es un término médico para designar a aquellos doctores que no están en el puesto más alto y que, como es natural, no pueden imponer los honorarios más elevados».

«Kurt adoptaba una actitud amable hacia la gente de fe judía. Y en cierta ocasión dejó caer que era un milagro (wunder) cómo, sin un país, habían sido capaces de sobrevivir durante cientos de años, casi como una nación, gracias a su fe.»

En 1933, después de que varios colegas, incluida Taussky, habían ido a despedirle al Westbahnhof con ocasión de su viaje a Princeton, cayó enfermo antes de coger el barco y regresó a casa. Su familia le persuadió para que lo intentara de nuevo y el segundo intento tuvo éxito. (G confió esto a Taussky más tarde.)

Tras la conferencia Gibbs en 1951, Taussky-Tood oyó a la Sra. Gödel decirle, «¡Kurtele, no hay comparación entre tu conferencia y las demás!».

El 26 de enero, G solicitó en la biblioteca los *Fundamentos metafísicos de la ciencia natural* de Kant. Esto indica un temprano interés por la filosofía de la física. Entre 1924 y 1926 G tomó en préstamo principalmente libros de física.

1926

En palabras del propio G (véase la sección 2.1), en el otoño se pasó a las matemáticas y también se convirtió en miembro del Círculo de Schlick [comúnmente conocido como el Círculo de Viena]. No obstante, no fue nunca un positivista, sino que incluso en esa época, aceptaba sólo algunas de sus tesis. Su interés por la precisión le llevó de la física a la matemática y de ésta a la lógica matemática. En *GQ*, G manifestaba, «Este grupo [el Círculo de Viena] despertó mi interés por los fundamentos...». También confiesa (véase sección 1.2.2) que el interés de algunos miembros del grupo por los fundamentos de la matemática databa de mucho antes de que al *Tractatus* de Wittgenstein hiciera mella en ellos. G asistió regularmente a las reuniones del círculo entre 1926 y 1928, pero luego se fue apartando poco a poco de él.

Carnap llegó a Viena en el otoño como Dozent, y a instancias suyas, Schlick decidió dedicar tantas sesiones consecutivas como fueran necesarias a un nuevo análisis del *Tractatus*, leyendo el libro en voz alta, sentencia por sentencia. Esto ocupó todo el año académico. Como G comenzó a asistir a las reuniones del Círculo por esta época, cabe presumir que estudiara este libro en ese año. Esto concuerda prácticamente con su afirmación (en *GQ*) de que estudió por primera vez a Wittgenstein en 1927 (pero que nunca leyó completas ninguna de sus obras). A juzgar por lo que me dijo en 1972, no le gustaba el *Tractatus* porque se propone mostrar que la filosofía no es posible.

El diario de Carnap indica que éste empezó a mantener conversaciones con G en 1927 y que conservaba notas de algunas de las discusiones mantenidas con él entre mayo de 1928 y 1933 (véase la sección 2.2). Parece que muy pronto (probablemente en 1928) se invirtieron los papeles de profesor y alumno. Carnap estuvo en Viena hasta el verano de 1931, pero siguió visitando Viena (desde Praga) durante varios años.

Arthur Burks me contó en cierta ocasión dos anécdotas que le había oído a Carnap. Carnap le pidió a G, cuando era todavía estudiante, unos artículos para una enciclopedia con el fin de darse a conocer. G declinó la invitación alegando que no tenía necesidad de eso para llegar a ser conocido. La otra anécdota es que G, después de haber llegado a sus resultados de incompletud, estaba preocupado con que algún otro pudiera lograr sus resultados de forma

independiente [cabe suponer que por lo simples y transparentes que consideraba las pruebas].

En el momento en que G se pasó a las matemáticas, los profesores (ordentliche) de esta materia eran Fürtwängler, Hans Hahn y Wilheim Wirtinger (cuya materia era el análisis, siendo un experto en funciones Abelianas). Había también cuatro o más Privatdozent (profesores sin sueldo pero con obligaciones docentes), incluido Walther Mayer (1887-1948), que más adelante colaboró con Einstein, de diciembre de 1929 a 1934 (véase Taussky, *op. cit.*).

Hacia finales de 1926, G parece que asistió a cursos impartidos por Gomperz, Furtwängler, Schlick, Hans Thirring (sobre teoría de la relatividad), y Hahn. El extraordinario talento de G fue reconocido en la comunidad. El se sentía muy a gusto con las atractivas figuras de Schlick y Hahn, que a su vez lo apreciaban enormemente. Los contactos frecuentes con Karl Menger y Carnap empezaron más tarde (probablemente en 1927 y 1928).

Según Feigl, «En cuanto a la faceta personal, debo decir que Gödel, junto con otro estudiante miembro del Círculo, Marcel Natkin (oriundo de Lodz, Polonia), y yo nos hicimos grandes amigos. Nos reuníamos frecuentemente para pasear por los parques de Viena, y celebrábamos en los cafés interminables discusiones sobre cuestiones lógicas, matemáticas, epistemológicas y de filosofía de la ciencia —a veces hasta altas horas de la noche». Esto probablemente se refiere a los años comprendidos entre 1925 y 1928 o 1929, ya que Natkin en 1929 se fue a París. Más tarde, en 1957, Natkin, Gödel y Feigl «tuvieron una reunión sumamente agradable en New York» (*The Intellectual Migration*, ed. Fleming y B. Bailyn, 1969, p. 640).

En conjunto, parece que los días de estudiante en Viena de G fueron a la vez felices y fructíferos.

Hahn, el principal maestro e interlocutor de G, era un experto en la moderna teoría de las funciones de variables reales y en teoría descriptiva de conjuntos, así como un entusiasta de la lógica matemática. Además de un buen matemático, era un hombre que trabajaba políticamente por el partido socialista y que estaba muy interesado en la percepción extrasensorial, hasta el punto de dar conferencias públicas sobre la cuestión. Había estudiado entre 1902 y 1904 en Göttingen, graduándose después en Viena. Se movió para llevar a Viena a Schlick en 1922 y a Carnap en 1926. La situación política de Viena se hizo difícil para él en 1933, y murió inesperadamente el 24 de julio de 1934, tras una breve enfermedad.

1927

Karl Menger, uno de los alumnos favoritos de Hahn, regresó en el otoño a Viena como profesor ausserordentlicher (asociado), después de pasar dos años en Amsterdam con Brouwer. Aceptó la invitación de Hahn para sumarse al Círculo de Schlick que se reunía todos los jueves por la tarde en la planta baja de un edificio situado en la Boltzmanngasse, que albergaba los institutos de matemáticas y física. Según cuenta en su ensayo sobre Schlick *(Rationality and Science,* ed. E. T. Gadol, 1982), Menger instauró en 1928 su Colloquio matemático siguiendo el modelo del Círculo, con la diferencia de que los informes de sus reuniones (desde 1928 a 1936) se publicaron (en ocho números). Estos informes tienen interés especialmente por las (trece) contribuciones de G, muchas de las cuales es probable que G no hubiera tomado la iniciativa de publicar. G asistió a la edición de la mayoría de los números (todos excepto el 6 y el 8). Más adelante, Menger invitó a G a Notre Dame, en la primavera de 1939, y trató de persuadirle para que se quedara en América.

«En el declive de 1927», según Menger (p. 88), «el *Tractatus* como tal ya no figuraba entre los asuntos a tratar. Pero asomaba en las discusiones y especialmente en todo lo que Schlick decía y pensaba». En 1929, Otto Neurath, principalmente con la ayuda de Carnap, escribió el panfleto *Wissenschaftliche Weltanchauung: Der Wiener Kreis.* Menger cree que el manifiesto no gustó ni a Hahn, aunque accediera a firmar como el autor principal, ni a Schlick, para quien se escribió. Desde luego apartó a Menger del Círculo. «El opúsculo produjo un descontento mayor aún en Gödel» (p. 92).

La tendencia a evolucionar de una postura más flexible y vaga a otra más restrictiva y concreta parece estar en acción, por ejemplo, cuando uno pasa de Locke a Hume. En el caso del Círculo de Schlick, la transición de las primeras tesis de éste a las doctrinas de Carnap me parece que produce un resultado menos estable y coherente que en el caso de Hume. Además, el culto a Wittgenstein parece haber obstaculizado más que favorecido una buena evolución. Aparte de en la atractiva personalidad de Schlick y de Hahn, las simpatías de G por el Círculo residían, probablemente, en la búsqueda de precisión, las discusiones abiertas y carentes de dogmatismo, y la gran atención que prestaba a la ciencia fundamental. G criticaba su restrictiva concepción empirista de la ciencia y creía que se pueden desarrollar «teorías» acerca de conceptos filosóficos.

Moritz Schick (1882-1936) era, lo mismo que Hahn, persona culta y muy sincera. (Sigo aquí lo que cuenta Menger, que concuerda perfectamente con informes hechos por otros.) Era modesto casi hasta el extremo de la timidez, especialmente para con los más jóvenes y los más débiles (como era el caso de los estudiantes). «Las frases vacías en sus labios o el más ligero rastro de ostentación eran impensables.» Tenía un talento especial para dirigir discusiones estimulantes. Empezó a tener discusiones regulares con sus colegas inmediatamente después de tomar posesión de su puesto en Viena en 1922. Probablemente hacia 1924, tales discusiones se convirtieron en las reuniones que dieron lugar a la denominación de «Círculo de Schlick». Durante algunos años, su interés por la lógica y las matemáticas había sido muy grande, pero, tras su primer contacto personal con Wittgenstein en 1927, parece que fué desarrollando poco a poco «una propensión en contra de la lógica formal y de las matemáticas». (Esto, dicho sea de pasada, ilustra su desacuerdo con Carnap.)

«El mejor modo de describir sus ideas políticas tal vez sea decir que eran las de un liberal al estilo británico.» En 1933, cuando Hitler subió al poder en Alemania, la situación política en Austria se volvió enrarecida. «La situación de Schlick en la universidad se hizo precaria.» Los judíos y miembros más izquierdistas del Círculo estaban en general en peor situación. En especial, Otto Neurath que era socialista y uno de los miembros más activos y que estaba en Moscú desde principios de 1934, ya no pudo volver a Austria. Las discusiones teóricas en el Círculo también «llegaron a un impasse» en «los meses previos a la muerte de Hahn». El 22 de junio de 1936, un antiguo estudiante paranoico disparó contra Schlick y lo mató, y las actividades (de grupo) del Círculo de Viena se paralizaron por completo en dicha ciudad.

Un rasgo especial de Schlick era su unidirigida admiración por un solo héroe o autoridad en cada etapa de su desarrollo. En los primeros años del siglo, fue Max Planck, con quien estudiaba física en Berlín, luego fue Einstein y la teoría de la relatividad, Hilbert y el método axiomático (con especial énfasis en las «definiciones implícitas»), Russell y la lógica matemática y, por último, durante los últimos diez años de su vida, Wittgenstein. Especialmente durante la última etapa, su deseo era atribuir sus propias ideas a su héroe o abandonarlas por no mejor razón que algún indicio de desaprobación por parte de éste.

En las fichas bibliotecarias figuran como direcciones de G las de Frankgasse 10/II/11 el 28 de junio y Währingerstr. 33/IV/22 el 5 de septiembre y el 12 de octubre. Los libros solicitados en este año son principalmente de teoría de números. De modo más exacto, de acuerdo con el padrón, G vivió en la primera dirección del 8 de abril al 20 de julio de 1927 y en la segunda del 6 de octubre de 1927 al 1 de julio de 1928.

Menger escribió en 1981 una memoria, «Recollections of Kurt Gödel» (que saldrá en *Kurt Gödel, Leben und Werk,* ed. W. Schimanovich, E. Köhler y P. Weibel, a la que nos referiremos como Menger o memoria de Menger). En ella dice que en el otoño de 1927 impartió un curso sobre teoría de la dimensión. «Uno de los estudiantes matriculados se llamaba Kurt Gödel. Era un muchacho delgado y extraordinariamente silencioso. No recuerdo haber hablado con él entonces. Más tarde, lo vi de nuevo en el Círculo de Schick; sin embargo, no le vi nunca subir a la palestra o participar en una discusión en el Círculo. Sólo había en él indicios de interés por ligeros movimientos de cabeza —indicando acuerdo, desacuerdo o escepticismo.»

1928

Fue en este año cuando G conoció a Adele Nimbursky Porkert (1899-1981), la cual trabajaba en *Der Nachfalter,* un local nocturno vienés. Era seis años mayor que él. Tenía poca educación formal, había trabajado como bailarina, cantante o camarera. Tenía la cara ligeramente desfigurada por una mancha de nacimiento. Los padres de G, especialmente el padre, pusieron objeciones a este romántico flirteo. De hecho, no se casaron hasta 1938.

Parece que éste fue el comienzo de una estrecha relación que duró unos 50 años (hasta la muerte de G). No tuvieron hijos, mientras que Einstein, que estuvo viudo durante 20 años (1936-1955), tuvo dos hijos de su primera mujer, Mileva (1875-1936, con la que se casó el 6 de enero de 1903) y dos hijastras de su segunda mujer, Elsa (1876-1936, con la que se casó el 2 de junio de 1919).

G vivió en Langegasse 72/II/14 del 4 de julio de 1928 al 5 de noviembre de 1929 (por lo que su tesis doctoral se escribió aquí); según WS, Adele, todavía casada con el fotógrafo Nimbursky, vivía entonces en Langegasse 65, prácticamente al otro lado de la calle.

La residencia era compartida con el hermano de G y constaba de tres habitaciones, siendo la mitad de un amplio apartamento. Su padre se quedaba también con ellos cuando acudía a Viena.

Este fue el año en que G empezó a dedicarse más de lleno a la lógica matemática, estimulado tanto por las clases de Carnap (sobre los fundamentos filosóficos de la aritmética, el semestre de invierno de 1928/29), como por la primera edición del famoso texto de Hilbert y Ackermann (HA, 1928), en el que se planteaban como problemas abiertos tanto la completud como la decidibilidad de la lógica elemental (el cálculo funcional restringido). (El segundo de estos problemas se llama simplemente el Entscheidungsproblem.) [G también solicitó y recibió *Principia Mathematica* en julio.]

Brouwer dio dos conferencias en Viena: «Mathematik, Wissenschaft, und Sprache», el 10 de marzo (publicada en *Monatshefte,* vol. 36, 1929, pp. 153-164), y «Die Struktur des Continuums», el 14 de marzo (publicada por Distel, Viena, 1930). De las dos conferencias, probablemente la más influyente fue la primera. Se dice que fue la causante de que Wittgenstein volviera a la filosofía. Parece verosímil que G asistiera a ambas conferencias. De hecho, en un borrador de una carta (fechada el 12 de abril de 1972) G dice que sólo vio a Wittgenstein una vez en una conferencia, probablemente la de Brouwer (véase la sección 2.2). Carnap también afirmó que la primera conferencia había influido en G. En la parte introductoria de la disertación de G (1929, véase la sección 10.1), hay algunas observaciones sobre las tesis de Brouwer.

Según Feigl (*op. cit.*, p. 639), cuando «se invitó a Brouwer a dar una conferencia en Viena sobre el intuicionismo en matemáticas, Waismann y yo nos las ingeniamos para convencer a Wittgenstein, tras mucha resistencia, para que nos acompañara a la misma. Cuando, a la salida, Wittgenstein entró con nosotros a un café, se produjo un gran acontecimiento. De repente, Wittgenstein se puso a hablar con gran locuacidad y muy largamente de filosofía. Tal vez este momento marcó el cambio de rumbo», pues no mucho más tarde volvió de nuevo a la filosofía.

Hilbert llevó una delegación de sesenta y siete matemáticos alemanes al Congreso Internacional oficial (el primero desde 1912) celebrado en Bolonia los días 3-10 de septiembre. En la sesión inaugural Hilbert impartió la conferencia «Probleme der Grundlegung der Mathematik».

Bajo la falsa impresión de que la consistencia de la teoría de nú-

meros había sido probada (por métodos finitistas), Hilbert reseñó cuatro (áreas de) problemas. Hablando en líneas generales, son los siguientes: 1) la prueba finitista de la consistencia del análisis, 2) la de la teoría de conjuntos, 3) la completud del análisis y la teoría de números de primer orden, 4) la completud de la lógica de primer orden. Dado el vivo interés existente en Viena por las cuestiones de fundamentos, es muy probable que G se hiciera con el contenido de la conferencia enseguida. En cualquier caso, G conocía esta conferencia antes de 1930, como se desprende de la referencia a ella en la nota 48 de su ensayo sobre la incompletud. Es sumamente destacable el hecho de que G respondió esencialmente a las cuatro cuestiones en los dos años que siguieron a la conferencia. [Para un análisis más extenso de esta cuestión, véase la sección 2.3.]

Los libros solicitados por G en este año (a partir del 1 de octubre) son principalmente de lógica.

1929

El 23 de febrero, el padre de G, que había nacido el 28 de febrero de 1874, muere inesperadamente. A G se le permitió librarse de la ciudadanía checoslovaca el 26 de febrero y el 6 de junio adquiere la austríaca.

Tras la muerte de su esposo, la madre de G se trasladó a Viena, se instaló en un amplio apartamento y lo compartió con sus dos hijos hasta 1937 en que regresó a su villa de Brno. En 1944 se reunió de nuevo en Viena con su hijo mayor Rudolf. El apartamento ocupado por la familia entre el 5 de noviembre de 1929 y el 16 de noviembre de 1937 estaba en Josefstädterstrasse 43; G paró allí durante este periodo cuando estaba en Viena. Del 11 de noviembre de 1937 a septiembre de 1938 (en que se casó con Adele) y, después de su viaje a América, entre junio y noviembre de 1939, vivió en Himelstrasse 43. El y Adele vivieron en Hegelstrasse 5 entre el 9 de noviembre de 1939 y enero de 1940 (en que dejaron Viena para ir a Princeton), pero oficialmente la dirección siguió a nombre de ellos hasta el 14 de febrero de 1948 (en que se dieron de baja).

Según el testimonio de G (de 1976) él había «completado sus estudios formales en la universidad antes del verano de 1929». No tengo muy claro lo que esto quiere decir exactamente. ¿Había por ejemplo, un amplio examen final comparable al que Einstein hubo

de pasar en el verano de 1900, examen después del cual «durante un año entero me [a Einstein] resultaba desagradable la consideración de todo problema científico»? Mi impresión es que G no habría hecho tanto caso de un examen así. Pero como quiera que sea, lo que parece es que G no tardó en emprender una importante investigación nada más terminar «sus estudios formales». Así, su disertación en la que prueba la completud de la lógica elemental fue aprobada por Hahn y Furtwängler el 6 de julio y presentada al decano de la facultad de filosofía el 15 de octubre.

En 1976 G afirmó que había leído HA en 1929. La completud de la lógica elemental, en el sentido que hoy nos es familiar, se formulaba (concordando en espíritu con la idea de Bolzano de 1837, pero de una forma más concreta al usar un sistema formal específico de lógica elemental) y planteaba como cuestión abierta en HA (p. 68). (También se menciona un sentido más vago de completud, el cual no da, empero, una pista clara respecto a cómo se podría obtener un sistema completo en dicho sentido.) Más énfasis se pone en HA (especialmente en p. 77 y en pp. 73-74) en el Entscheidungsproblem. «La solución del Entscheidungsproblem tiene una importancia fundamental para las teorías de todas aquellas áreas en que los teoremas son lógicamente deducibles de un número finito de axiomas.»

De estos dos problemas abiertos, G resolvió (positivamente) el de la completud en el verano y reescribió como tesis doctoral el resultado, concluyendo este trabajo hacia julio. Una versión revisada de la misma fue recibida por el editor de *Monatshefte* el 22 de octubre y publicada en 1930; la principal adición que se hizo fue lo que ahora se conoce como el «teorema de compacidad». G recibió su título el 6 de febrero de 1930. Presentó su resultado en el coloquio de Menger el 14 de mayo y en Könisberg (véase más abajo) el 6 de septiembre de 1930. (G no recibió 100 separatas de su publicación hasta después de la reunión de Königsberg, el 19 de septiembre.)

Como el concepto de satisfacibilidad por un modelo tiene un sentido totalmente distinto para los intuicionistas, todo el problema resulta diferente para ellos. «Es evidente que una prueba intuicionista de completud sólo se puede lograr a través de la solución [positiva] del Entscheidungsproblem de la lógica matemática, mientras que el resultado [de la disertación de G] sólo lo transforma en (reduce a) el problema de la deducibilidad formal [en sistemas formales conocidos sistemas formales del cálculo funcional restrin-

gido].» (De la disertación de G, que se analiza detalladamente, lo mismo que su artículo, en la sección 10.1)

Respecto del problema de la decidibilidad G probó, mediante consideraciones estrechamente relacionadas con su disertación, la decidibilidad de la clase prenexa más difícil de decidir, conocida con el nombre de «el caso de Gödel», con el prefijo cuantificacional E..EAAE...E (en cuanto a la satisfacibilidad). El ensayo sin fecha en el que ofrece este resultado se halla incluido en el volumen 2 (pp. 27-28) del coloquio de Menger, dedicado al año 1929-1930. Es probable que el resultado haya sido obtenido en el verano de 1930 y más o menos a la vez que su teorema de completud. [Según Menger, G escribió este ensayo a instancias suyas (antes del verano de 1930), «aplicando su (de G) prueba de completud».] En 1933 volvió de nuevo sobre este problema y probó además que toda fórmula satisfacible perteneciente a la clase tiene un modelo finito. En un enunciado, que tal vez sea el único seriamente equivocado de su obra, G afirmaba que su método es aplicable al caso cuando se añade la identidad. Finalmente, en 1983 Warren Goldbarb probó que el caso de Gödel con identidad es en realidad indecidible y una clase de reducción: lo hizo por el procedimiento de expresar un axioma de infinitud y de apelar luego a la central y más difícil clase de reducción prenexa, que sólo contiene el simple prefijo cuantificacional AEA (resultado que data de 1961) (véase *Bulletin* AMS, vol. 10, 1984, pp. 113-115, y JSL, vol. 49, 1984, pp. 1237-1252).

El obstáculo para una solución (negativa) general al problema de la decisión en este tiempo era la falta de un concepto claro de decidibilidad (o computabilidad). En su ensayo sobre la incompletud, escrito en 1930, G ofreció resultados parciales (en los teoremas IX y X) que, como se vería más tarde, contenían los pasos matemáticos esenciales para una solución negativa. Lo que faltaba era una definición de funciones computables que captara convincentemente la noción intuitiva y fuera expresable de un modo elemental. El propio G ofreció una definición así (desarrollando una sugerencia hecha por Herbrand) en sus conferencias de 1934, en las que también consideró tentativamente la adecuación de su definición a la noción intuitiva. (Esta importante cuestión se considera con más detalle en las secciones 6.2 y 10.2.)

G declaraba en *GQ* que éste fue el año en que estudió por primera vez los *Principia Mathematica*. [Teniendo en cuenta el impacto producido por el temprano trabajo de Russell sobre Wittgenstein y

G, no deja de ser curioso comprobar que R era diecisiete años mayor que W y éste, a su vez, diecisiete años mayor que G.]

La primera reunión registrada del coloquio de Menger, que venía reuniéndose irregularmente y sin protocolos desde el otoño de 1928, tuvo lugar el 24 de octubre. Menger: «Hacia finales de 1929 también invité a Gödel al coloquio y desde entonces participó regularmente en las reuniones mientras estuvo en Viena y su salud se lo permitió. Desde el principio pareció sentirse bien en estas asambleas e incluso hablaba fuera de ellas con algunos de los participantes, especialmente con G. Nöbeling y con algunos visitantes extranjeros, y más tarde, frecuentemente, con A. Wald. Participó con entusiasmo en diversas discusiones. Su expresión (tanto oral como escrita) era siempre de la mayor precisión y al mismo tiempo extraordinariamente breve. En la conversación no matemática era siempre sumamente reservado.»

En la sección 2.2 he dado cuenta de los trabajos de Carnap. Hay algunos detalles más sobre el diario de Carnap correspondiente al 23 de diciembre de 1929 (tal como ha sido descifrada su caligrafía Stolze-Schrey por Richard Nollan, encargado de la colección), los cuales no sólo dan cuenta de lo que G pensaba sino que también nos permiten formarnos una idea de cómo eran las relaciones entre los colegas de la Viena de esta época.

Carnap permaneció en el Arkadencafé de 1 P.M. a 9 P.M. Estuvo con Schlick de 1 a 3, y Schlick le habló de una joven estudiante que quería suicidarse. De 3:30 a 5:30 Waismann le dio una novela de Conrad y le informó de una reunión mantenida con Wittgenstein la tarde anterior. De 5:45 a 8:30 Gödel le habló «de la inagotabilidad de la matemática (véase hoja independiente). El se sintió impulsado hacia su idea por la conferencia impartida en Viena por Brouwer. La matemática no es completamente formalizable. El parece tener razon». A las 9 P.M. fue al cine Kolosseum para ver la película «Broadway» y no le pareció buena. [La hoja independiente se cita en la sección 2.2.]

1930

Científicamente éste puede que haya sido el año más importante (especialmente el periodo de medio año que antecede al 17 de noviembre, momento en que se recibió para ser publicado su gran ensayo) de la vida de G. De acuerdo con los recuerdos de G de 1976,

éste debio ser el año en que oyó hablar por primera vez del esbozo hilbertiano de prueba de la hipótesis del continuo y en que empezó a pensar en el problema del continuo. Además, también según su testimonio, en el verano empezó a estudiar el problema consistente en probar la consistencia (relativa) del análisis. Enseguida se dio cuenta de que la verdad en teoría de números no se puede definir en dicha teoría y pasó a probar una forma combinatoria de su primer teorema de incompletud.

Como antes hemos señalado, G envió una versión revisada de su tesis en octubre de 1929. Lo más probable es que desde 1928 hubiera venido reflexionando sobre los problemas específicos sugeridos en el programa de Hilbert. En concreto, durante el periodo comprendido entre octubre de 1929 y el verano de 1930, seguramente estuvo deliberando sobre, y experimentando con, problemas alternativos con vistas a elegir el siguiente problema a abordar tras el éxito de la prueba de que la lógica elemental es completa. Por lo que parece, decidió en algún momento que el más prometedor era el de la consistencia (relativa) del análisis y empezó a trabajar intensamente en él en el verano.

Hasta la fecha no he visto ningún informe sobre las actividades de G anteriores al verano. La única excepción es que Menger invitó a Tarski a dar una serie de conferencias en Viena en el mes de febrero. Al parecer Tarski se unió a G en la tarea de acabar de convencer a Carnap de la necesidad de usar un metalenguaje independiente, paso que G había recomendado ya el año anterior, pero que tanto Carnap como otros seguidores de Wittgenstein habían sido reacios a dar.

Hay en el Nachlass de G un borrador de una respuesta a una carta fechada el 27 de mayo de 1970 de Yossef Balas, entonces un alumno de la universidad de Iowa del Norte, relativa al descubrimiento de G de los teoremas de incompletud. El borrador de G establece de un modo diferente algunos de los puntos que me contó en 1976. En el borrador dice que empezó buscando una «prueba de la consistencia relativa del análisis en la aritmética en teoría de modelos» por medio de «una ε relación aritmética que satisfaga el axioma de comprehensión». Observa que esto suponía un nuevo enfoque en este momento, ya que la gente sólo estaba buscando pruebas de consistencia absoluta en teoría de la demostración, sintiéndose incómodos con la verdad y los modelos [en lo referente a las partes fundacionales, en contraste, por ejemplo, con la geometría, tal

como había insistido Hilbert]. El consideró la representación de cada número real mediante una función proposicional $\Phi(x)$ de la aritmética y reparó en que si $\Phi(x)$ es reemplazada por «$\Phi(x)$ es demostrable», entonces podría expresarla en términos de aritmética (recóndita). El problema estriba en si se puede identificar la verdad con la demostrabilidad. Pero «mucho antes, había hallado la solución *correcta* de las paradojas semánticas en el hecho de que la verdad en un lenguaje no puede definirse dentro de él mismo», por lo que la verdad difiere de la demostrabilidad. (Especial interés tiene la afirmación explícita de G sobre su descubrimiento de la solución correcta de las paradojas semánticas.) Además, G examina también en su borrador la pretendida anticipación de Finsler y muestra convincentemente que Finsler erró totalmente el punto crucial de estarse ocupando de sistemas formales.

Un párrafo tachado de este borrador puede dar cuenta de por qué no se extiende (inicialmente) más en la consideración del concepto de verdad. «Pero, a consecuencia de los prejuicios filosóficos de nuestro tiempo: 1) nadie andaba tras una prueba de consistencia relativa porque se consideraba axiomático que una prueba de consistencia tiene que ser finitaria para que tenga sentido, 2) el concepto de verdad matemática como contrapuesto al de demostrabilidad era visto con gran recelo y ampliamente descartado como carente de sentido.»

El 26 de agosto, G se reunió con Carnap, Feigl y Waismann en el café Reichsrat, para discutir sus planes de viaje a Königsberg. Según el «diario» de Carnap, la discusión derivó luego hacia el «Gödel's Entdeckung: Unvollständigkeit des systems der PM; Schwierigkeit des Widerspruchsfreiheitsbeweises». Tres días después se volvieron a reunir en el mismo lugar y Carnap señaló: «Zuerst erzählt mir Gödel von seiner Endeckungen.» Después, todos ellos, junto con Hahn y Kurt Grelling, viajaron en tren hasta Swinemüde, y luego en barco hasta Königsberg, para participar en la Segunda Conferencia sobre Epistemología de las Ciencias Exactas (5-7 de septiembre).

La conferencia se celebraba en conjunción con (y precedida de) la 91 convención de la Gesellschaft deutscher Naturforscher und Arzte (la Sociedad de Físicos y Científicos Alemanes) y la 6.ª deutsche Physiker und Mathematikertagung. Fue en la sesión inaugural del congreso (probablemente, el 9 de septiembre) cuando Hilbert fue nombrado ciudadano honorario de Königsberg, y pronunció su

conferencia «Naturerkennen und Logik», a la que asistió G. Esta fue la única vez en que G vio a Hilbert; nunca se volvieron a encontrar ni tampoco mantuvieron correspondencia entre ellos.

La conferencia de tres días de duración se inició el 5 de septiembre con largas ponencias sobre filosofía de la matemática impartidas por Carnap, Heyting, v. Neumann, y Waismann (cuya conferencia «Das Wesen der Mathematik: der Standpunkt Wittgensteins» fue añadida con posterioridad). El segundo día, H. Reichenbach, W. Heisenberg, y O. Neugebauer impartieron largas conferencias seguidas por intervenciones de veinte minutos de G, Arnold Scholz, y Walter Dubislav. La intervención de G versó sobre su teorema de completud, del que apareció un «abstract» en la p. 1068 de *Die Naturwissenschaften,* vol. 18 (1930). El tercero y último día estuvo ocupado por una sesión de discusión sobre los fundamentos de la matemática, presidida por Hahn, en tanto que moderador de las conferencias del 5 de septiembre (excepto la de Waismann). Entre los participantes figuraban A. Scholz, K. Reidemeister y G, además de los tres conferenciantes del primer día. [Las tres conferencias y las discusiones se publicaron en el volumen 2 de *Erkenntnis,* 1931, incluido un postscriptum aportado tras el congreso por G. Las conferencias publicadas fueron reseñadas por G y aparecieron en versión inglesa en BP. Una versión inglesa anotada de las discusiones ha sido ofrecida recientemente por John Dawson en *History and Philosophy of Logic,* vol. 5 (1984), pp. 111-129. Las reseñas de G aparecieron en *Zentralblatt,* vol. 2 (1932), pp. 321-322: se hallan recogidas, junto con todas las demás reseñas de G (con traducción inglesa) en el primer volumen de los *Collected Works* de G.]

Al final de toda la sesión, G habló por primera vez y criticó el supuesto formalista de que la consistencia de axiomas «transfinitos» asegura la inderivabilidad de una consecuencia que sea «no-vacuamente falsa». Y concluyó, «Pues no se puede afirmar con certeza de ningún sistema formal que todas las consideraciones no vacuas sean representables en él.» Y luego v. Neumann intercaló, «No es un resultado inevitable que todas las reglas de inferencia permisibles desde el punto de vista intuicionista puedan ser formalmente reproducidas». Fue entonces cuando G anunció su resultado de incompletud: «Bajo el supuesto de la consistencia de la matemática clásica, se pueden dar ejemplos de proposiciones... que son en realidad no-vacuamente verdaderas, pero indemostrables en el sistema formal de la matemática clásica.»

A continuación, G tuvo una interesante conversación privada con v. Neumann, que enseguida entendió la prueba de G (del primer teorema, con proposiciones indecidibles menos elegantes que las que obtuvo más tarde). En su carta de 20 de noviembre, v. Neumann decía, por ejemplo, «E. Schmidt, dem ich Ihr Resultate, wie Sie es in Königsberg vortrugen, mitteilte, war davon entzückt. Er hält es, wie ich, für die grösste logische Entdeckung seit langer Zeit».

Poco después de la conferencia, G mejoró el primer teorema (formulando la proposición indecidible en una forma aritmética simple perteneciente al «análisis Diofántico») y, además, obtuvo un segundo teorema. Un resumen estableciendo tales resultados fue presentado ante la Academia de Viena el 23 de octubre. El famoso ensayo fue recibido para su publicación el 17 de noviembre. En una carta fechada el 20 de noviembre, v. Neumann sugería de forma independiente el segundo teorema como «importante corolario» al resultado de G. Este respondió inmediatamente enviándole una copia de su ensayo, a lo que v. Neumann respondió dando las gracias. (La correspondencia se conserva en el Nachlass de G.)

El artículo fue escrito como una primera parte; G tenía el plan de dar más detalles de la prueba de su segundo teorema en una segunda parte. Pero nunca publicó esta segunda parte porque, como dijo más tarde, su esbozo de la prueba fue aceptado por todos. El primer tratamiento detallado apareció en el segundo volumen de Hilbert-Bernays (1939).

El 24 de diciembre, Bernays escribió a G para acusar recibo de su ensayo sobre completud y para solicitar las galeradas del de la incompletud, que R. Courant e I. Schur le habían dicho que contenía «bedeutsame und überraschende Ergebnisse». G respondió enseguida, y Bernays escribió una carta de 16 páginas el 18 de enero de 1931 describiendo los resultados de G como «ein erheblicher Schritt vorwärts in der Erforschung der Grundlagenprobleme». [Este fue el comienzo de su correspondencia (y otras relaciones entre ellos), que duró, de forma intermitente, unos 45 años. Al parecer, la última carta de G a Bernays lleva fecha del 12 de enero de 1975 y la de éste a G, de 24 de enero de 1975.]

Bernays (1888-1977) se convirtió en asistente de Hilbert en 1917, y fue nombrado profesor asociado sin sueldo (nichtbeamteter ausserordentlicher professor) en 1922. Por su calidad de «no-ario» fue privado de su puesto en 1933, marchándose a Zurich. Su larga

colaboración con Hilbert es bien conocida y el famoso HB (en dos volúmenes) fue escrito enteramente por él.

Por la información que se desprende de una carta de Bernays (3 de agosto de 1966), la reacción de Hilbert ante los teoremas de G parece que fue la siguiente: «En un principio no sintió más que enfado y frustración, pero luego empezó a tratar de ocuparse de modo constructivo del problema» (Reid, p. 198). En diciembre Hilbert dio una charla ante la Sociedad Filosófica de Hamburgo, que constituyó la base del artículo que publicó en *Math. Annalen,* vol. 104 (1931), pp. 485-494 (recogido parcialmente en el volumen 3 de sus obras completas, pp. 192-195). En él se introduce una regla infinita que establece que la fórmula (x)Ax puede ser tomada como una premisa si A(z) se puede mostrar (por métodos finitistas) que es una fórmula correcta para cada numeral z. En la reseña de este ensayo, G se limita a decir que la regla «es, desde el punto de vista estructural, de un tipo enteramente nuevo». Según el «diario» de Carnap, G afirmó el 21 de marzo de 1931 que el programa de Hilbert se vería comprometido por la aceptación de esta regla. Una ulterior elaboración de esta idea fue ofrecida en la charla impartida por Hilbert ante la Academia de Ciencias de Göttingen el 17 de julio de 1931, publicada con el título de «Beweis des Tertium non-datur» en su *Nachrichten,* pp. 120-125. Según Taussky *(op. cit),* G criticó las afirmaciones y propósitos de Hilbert, y censuró duramente este artículo, diciendo algo así como «¿Cómo puede escribir semejante artículo después de lo que yo he hecho?».

Hoy estamos familiarizados con la observación de Turing (Turing 1936, p. 259) de que un sistema formal completo es decidible dado que podemos enumerar alternativamente todos los candidatos a prueba de una proposición *p* y de su negación. Como o la una o la otra son demostrables, la enumeración siempre tiene final. De ahí que la creencia hilbertiana (anterior a los teoremas de G) en la completud de la teoría formal de números implique la menos plausible (incluso entonces) creencia en su decidibilidad. Este parece ser un buen ejemplo del hecho de que las creencias no son cerradas bajo la relación de consecuencia lógica. En conexión con este punto, no deja de tener interés comprobar que Bernays conjeturó de hecho la completud de la teoría formal de números y luego afirmó (en la nota 19) que la completud es un requisito más débil que la decidibilidad (en la p. 56 de su *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik;* el ensayo original apareció en *Blatter für Deutsche Philosophie,* vol. 4,

1930/31, pp. 326-367, y debió ser escrito en los últimos meses de 1930).

En la primavera de 1961 yo visité a Brower en su casa. El habló largamente de muchos temas. Entre otras cosas dijo que no creía que los resultados de incompletud de G fueran tan importantes como la formalización de Heyting del razonamiento intuicionista, porque para él los resultados de G eran obvios (obviamente verdaderos). Hay varias cosas en esta afirmación que resultan discutibles. No está claro que, de acuerdo con la postura general de Brouwer, tenga mucho interés una formalización de la lógica intuicionista. Lo realizado por Heyting había sido anticipado en una buena medida por un temprano trabajo de A. N. Kolmogorov, que, además, establecía una correlación más concreta entre la matemática clásica y la intuicionista (véase *FG*, pp. 414-437). La parte más interesante es la relativa a los teoremas de G. Es relativamente fácil ver que ningún sistema formal puede contener todas las matemáticas. Incluso si no consideramos lo no denumerable, es enormemente plausible que, dado un sistema formal cualquiera, podamos ir más allá de él mediante un argumento diagonal adecuado. Esto es probablemente lo que Brouwer tenía en su cabeza y, como antes hemos mencionado, fue la influencia ejercida por la conferencia de Brouwer lo que, según Carnap, llevó a G a afirmar que la matemática es inagotable (por cualquier sistema formal). Pero construir una proposición dentro de un sistema formal y mostrar que no es decidible en el sistema requiere más trabajo. Esto fue lo que hizo G y de ello también se seguía la indemostrabilidad de la consistencia en el propio sistema. Hasta el día de hoy no parece que haya pruebas esencialmente distintas y más simples que las originalmente ofrecidas por G para sus teoremas.

1931

Antes de que G alcanzara la edad de veinticinco años en la primavera, había acabado y publicado dos trabajos muy importantes. Durante los cuatro o cinco años siguientes se propuso cuatro tipos de labores: 1) el estudio continuado de algunas ramas de la matemática y de la física, 2) conferencias sobre su famoso ensayo de 1931 y ampliaciones del mismo, 3) reflexiones sobre la hipótesis del continuo, 4) investigación a corto plazo sobre algunos tópicos concretos

de lógica (y geometría), la mayor parte de ella publicada de forma no oficial en conexión con el coloquio de Menger. También escribió reseñas y ayudó a Hahn en su seminario y leyendo las pruebas de su libro. «Además», según Menger, «Gödel estudió en estos años mucha filosofía, entre otras cosas la metafísica alemana postkantiana. Pero ya había empezado a concentrarse en el estudio de Leibniz».

Durante este periodo, su única publicación larga fue su artículo de diez páginas sobre el Entscheidungsproblem (1933, en la *Monatshefte*). En Viena, G tuvo la gran suerte de poder publicar fácil y rápidamente su obra. De lo contrario, cabe dudar que hubiese publicado tanto como publicó hasta 1936. A comienzos de los cuarenta, obtuvo también unos cuantos resultados, muchos de los cuales hubiesen sido publicados si hubiera seguido participando en alguna actividad de grupo comparable al coloquio de Menger. En general, sus profesores y colegas de Viena no sólo influyeron sobre G en lo que se refiere a la elección de su área de investigación, sino que también contribuyeron mucho a hacer que sus ideas fueran ampliamente conocidas en un tiempo breve.

En una nota presentada el 22 de enero, G ofrecía una presentación más general de sus teoremas que empleaba como sistema básico la aritmética de Peano y no la teoría de tipos. (Menger, según su memoria, recibió la información en febrero en el Instituto Rice de Houston. Interrumpió sus clases regulares para insertar «un informe sobre un descubrimiento gödeliano que hará época, y de este modo los matemáticos del Instituto Rice fueron probablemente las primeras personas de América que se asombraron por este cambio decisivo en las matemáticas y la lógica».) El 15 de septiembre, G habló de estos resultados en el Congreso anual de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung de Bad Elster.

G presentó en el coloquio de Menger dos notas sobre el cálculo proposicional, una el 24 de junio en respuesta a una cuestión planteada por Menger y otra el 2 de diciembre en respuesta a una cuestión de Hahn.

En una carta de 1963, G recordaba que en 1931 Herbrand le había enviado una carta haciéndole, a propósito de las funciones recursivas, la sugerencia que G le atribuye en sus conferencias de 1934. Esta carta, lo mismo que la segunda de Herbrand y que el borrador de la respuesta de G, están en el Nachlass. Esta respuesta a Herbrand no llegó a sus manos pues lleva fecha de 25 de julio y Her-

brand falleció el 27. El padre de Herbrand le envió después un anuncio del funeral.

Aunque su trabajo gozó enseguida de gran crédito tanto en Austria como fuera de Austria, en casa, entre su familia, no se apartó de su costumbre de «ocultar su luz bajo un bushel», como dijera su hermano (véase también RG).

G fue invitado a escribir, junto con A. Heyting, un libro sobre fundamentos de la matemática. G aceptó pero al final se retiró del proyecto (tras una dilación de varios años). En su Nachlass (en la carpeta 04/10; la 04/11 contiene el borrador de Heyting) se conserva un borrador fragmentario de su proyecto de contribución.

Kleene cuenta que v. Neumann habló en Princeton, en el otoño, sobre los resultados de incompletud de G. Después, «todos nosotros leímos el artículo de Gödel, que a mí me abrió todo un nuevo mundo de ideas y perspectivas. La impresión que me causó fue tanto mayor debido a lo conciso e incisivo del tratamiento de Gödel. Si me hubiera visto introducido en el mundo de los fundamentos externo al sistema de Church por amplia lectura de otra literatura, el efecto sobre mí habría sido menos dramático» (véase el artículo de Kleene que aparecerá en el mismo volumen que el de Taussky-Tood, *op. cit*).

En el congreso celebrado el 15 de septiembre en Bad Elster, Zermelo presentó también un trabajo; en los 60 William Feller recordó que Zermelo había hablado exaltadamente en contra de la intervención de G en la discusión. Posteriormente, Zermelo escribió un informe de ambas conferencias, la suya y la de G (*Jber. Deutch. Math-Verein,* vol. 41, p. 2, 1932, pp. 85-88), que muestra una apreciación inadecuada de los resultados de G. Zermelo escribió, el 21 de septiembre, una carta a G invitándole a estudiar su ensayo sobre «Grenzzahlen und Mengenbereiche» (*Fund. Mathe,* vol. 16, 1930, pp. 29-47) y advirtiéndole que había descubierto un «fallo esencial» en su prueba. Preparando su informe —decía la carta— había llegado a darse cuenta de que la prueba de G estaba mal.

Por lo que parece, Zermelo no se dignó leer el texto principal del ensayo de G sino que se limitó a tomar la explicación introductoria y eliminó Bew de la fórmula (1) (en *FG,* p. 598), la cual conecta la pertenencia en el conjunto de teoremas con la indemostrabilidad en el sistema dado S. Como consecuencia, la frase de G «Esto no es demostrable en S» se trocó en «Esto es falso» y Zermelo tuvo una fácil oportunidad de derivar una contradicción. Luego atribuía

el error de G al «prejuicio finitista», manteniendo que sólo superando éste, tarea que él se había impuesto a sí mismo, sería posible una «metamatemática» razonable. Si la prueba de G —afirmaba— hubiera estado bien hecha, habría contribuido enormemente a la tarea y rendido un servicio esencial a la verdad. Le estaba advirtiendo a G del error con tanta celeridad para darle la oportunidad de reexaminarlo.

G respondió el 12 de octubre explicando pacientemente sus resultados y ofreciéndose incluso a comentar el ensayo de Zermelo. Zermelo siguió sin convencerse de la importancia de los teoremas de G y no consideró el ofrecimiento hecho por G de comentar su ensayo; su respuesta del 29 de octubre puso fin a la correspondencia. [La carta de G y un borrador de la segunda carta de Zermelo están publicados en *Historia Mathematica,* vol. 6 (1979), pp. 294-304, con comentarios de I. Grattan-Guinness; las dos cartas de Zermelo se conservan en el Nachlass de G y son analizadas por John Dawson en la misma revista, vol. 12 (1985), pp. 66-70.]

La carta de G es elegante y muy lograda desde el punto de vista pedagógico. Además, la carta contiene una prueba exacta de que la verdad en un lenguaje formal no es definible en él (p. 299), teorema generalmente atribuido a Tarski, que no lo demostró como corolario del trabajo de G hasta 1933. Por lo demás, como antes he señalado, este resultado fue lo primero que descubrió G en el verano de 1930, antes de llegar a la más importante conclusión de la incompletud.

G también ofrece en esta carta una prueba alternativa de su primer teorema de incompletud (pp. 300-301). Dado que W (el conjunto de sentencias verdaderas) no puede representarse (por un signo de conjunto o fórmula definitoria) en el sistema dado S, pero en cambio B (el conjunto de proposiciones demostrables en S) sí puede, y dado que B es un subconjunto de W, B es un subconjunto propio de W. De ahí que haya alguna proposición verdadera A que no es demostrable en S. Y como A es verdadera, su negación tampoco puede ser demostrable en S. G observa que esta prueba tiene el inconveniente de no exhibir una proposición indecidible y de ser objetable desde el punto de vista intuicionista [probablemente, debido a la apelación explícita al conjunto W].

G observa que él no cree que la tesis central de su resultado resida en que no podemos encerrar toda la matemática en un sistema formal (o que podemos ir más allá de cualquier sistema formal);

esto ya se sigue del procedimiento diagonal de Cantor y no excluye la posibilidad de la completud de ciertos subsistemas de la matemática. La tesis central de su resultado es más bien que todo sistema matemático formal (que incluya adición y multiplicación) contiene proposiciones simples que son *expresables* en él pero *indecidibles* en él.

La respuesta de Zermelo (del 29 de octubre) parece conceder la corrección de la demostración de G pero, en contra de la proposición hipotética de su carta anterior, conferir escaso valor al resultado de G. Parece confundir el resultado de G con el de la no-denumerabilidad de Cantor, cosas que G se tomó la molestia de distinguir en su carta. El luego afirmaba haber obtenido un sistema general en el que todas las proposiciones son decidibles. Evidentemente no le gustaban los sistemas formales. Lo que es sorprendente es su renuencia a reafirmar su apreciación (expresada en su carta anterior) de resultados que muestran las limitaciones de los sistemas formales.

Mi maestro Shen Yuting estudió con Zermelo en 1933. En una carta de 1 de julio de 1983 afirmaba: «En aquellos días el ensayo de Gödel (de 1931) solía considerarse profundo y especializado. Recuerdo que cuando Zermelo habló, en 1933, de lógica matemática con aire de desprecio, añadió "entre esa gente [los que se ocupan del tema] Gödel es el más destacado". Zermelo inició un seminario dedicado exclusivamente a discutir este trabajo de Gödel, insinuando al parecer que él mismo no lo había entendido del todo.» Parece, no obstante, que Zermelo llegó más tarde a considerar importante el trabajo de G.

Recientemente E. Köhler me mostró material del diario de Carnap en el que se recogen unas cuantas discusiones con G. En el apartado referente al 10 de septiembre (1931), Carnap escribió, «Gödel lee a Lenin y a Trotsky, está a favor de la sociedad planificada y del socialismo e interesado en el mecanismo de influencias de la sociedad, e.g., la del capital financiero sobre la política».

El hermano de G afirma, según WS, que, a finales de 1931, G padeció una crisis psíquica grave y sintió tentaciones de suicidarse. La familia estuvo enormemente preocupada por su estado.

1932

Ostwald Veblen asistió a la presentación de G el 28 de junio (véase más abajo) y le invitó a visitar el Instituto de Estudios Avanzados. Era el tiempo en que se estaban reclutando personas para preparar el comienzo de las actividades de grupo en el I.A.S en el otoño de 1933. Menger había visitado el año anterior a Veblen en América y le invitó a que asistiera a la presentación de G en su coloquio. La visita de G de 1933 hizo de él uno de los primeros participantes en el I.A.S. Parece que si G hubiera querido, se habría quedado allí de una forma continua, con o sin convenios regulares adicionales con la universidad de Viena. Pero al parecer G prefirió seguir teniendo a Viena como refugio básico y sólo decidió dejarla en 1939, tras el deterioro experimentando, entre 1933 y 1939, por las circunstancias personales y políticas de Viena.

También fue en 1932 cuando Abraham Flexner logró convencer a Einstein para que aceptara un nombramiento en el I.A.S (en un principio sólo para cinco meses al año). Fue en su tercer encuentro (en junio, en Caputh) cuando Einstein manifestó su aceptación (para más detalles, véase Pais, p. 450). En 1933, llegaron a Princeton en octubre, el mes en que el I.A.S empezó a funcionar, tanto G (con 27 años) como Einstein (con 54). Aunque Einstein había viajado y se había movido mucho entre 1909 y 1933, de 1933 hasta su muerte en 1955 permaneció en Princeton, excepto durante las vacaciones. El 1 de octubre de 1940, el juez Phillip Forman le concedió la ciudadanía americana, más tarde (en 1948) el mismo juez haría lo propio con G (véase más abajo).

Según los recuerdos de G de 1976, «visitó Göttingen y vio a C. Siegel, G Gentzen, E. Noether, y probablemente también a Zermelo». [Esta puede que sea la misma visita que la mencionada en C. Christian (Leben und Kurt Gödels, *Monafshefte für Mathematik*, vol. 89 (1980), pp. 261-273, en la p. 264, línea 10.]

El 25 de febrero Hahn comunicó ante la Academia de Viena una nota de G sobre el cálculo proposicional intuicionista (impresa también en las series de Menger). También fueron presentadas al coloquio varias contribuciones sobre geometría, el 18 de febrero, el 25 de mayo y el 10 de noviembre.

La intervención de G del 28 de junio muestra que la aritmética clásica puede traducirse a la intuicionista lo cual pone de manifiesto que ésta no es más evidente, en ningún aspecto esencial, que la clásica.

Una nota de esta misma época ofrece axiomas para el predicado *Bp* («p es demostrable») y pone el sistema resultante en relación con los sistemas lógicos intuicionista y modal.

El 25 de junio presentó su famoso ensayo ante la universidad de Viena como Habilitationsschrift, para obtener su *venia legendi* (el derecho a enseñar como Privatdozent). En esta ocasión G preparó el siguiente currículum (Christian, p. 261):

Ich bin im Jahre 1906 in Brünn als Sohn deutscher Eltern geboren, besuchte dort vier Klassen Volkschule und die acht Klassen des deutschen Staatsrealgymnasiums, an dem ich im Jahre 1924 die Reifeprüfung ablegte. Im Herbst desselben Jahres begab ich mich nach Wien, wo ich mich seither ohne längere Unterbrechung aufhalte und 1929 auch die österreichische Staatsbürgerschaft erwarb. Im Wintersemester 1924 inskribierte ich als ordentlicher Hörer der philosophischen Fakultät und widmete mich in der ersten Zeit physikalischen, später vorwiegend mathematischen Studien. Daneben beschäftigte ich mich, angeregt durch Prof. Schlick, dessen philosophischen Zirkel ich häufig besuchte, auch mit modernen Arbeiten über Erkenntnistheorie. Meine eigene wissenschaftlich Tätigkeit bezog sich hauptsächlich auf das Gebiet der Grundlagen der Mathematik und der symbolischen Logik. Im Jahre 1929 reichte ich eine diesem Gebiet entnommene Arbeit «Über die Vollständigkeit des Logikkalküls» als Dissertation ein und promovierte im Februar 1930. Im selben Jahre referierte ich auf der Königsberger Tagung über die eben erwähnte Arbeit, ferner auf der Tagung der deutschen Mathematikervereinigung in Bad Elster 1931 über meine als Habilitationsschrift eingereichte Arbeit. In Wien beteiligte ich mich an dem von Prof. Menger veranstalteten Kolloquium und wirkte auch bei der Herausgabe des alljährlich darüber erscheinenden Berichtes mit. Auch in dem von Prof. Hahn im Studienjahr 1931/32 abgehaltenen Seminar über mathematische Logik war ich bei der Auswahl des Stoffes und der Vorbereitung der Hörer für ihre Vorträge mittätig.

Im Jahre 1931 wurde ich von der Redaktion des Zentralblattes für Mathematik, dessen ständiger Mitarbeiter ich bin, aufgefordert, zusammen mit A. Heyting einen Berich über die mathematische Grundlagenforschung zu schreiben, mit dessen Ausarbeitung ich beschäftigt bin.
Wien, im Juni 1932
Dr. Kurt Gödel

[Nací en el año 1906 en Braun, de padres alemanes. En esa ciudad asistí durante cuatro años a la escuela primaria y cursé los ocho de enseñanza media en el instituto estatal alemán, donde pasé, en 1924, el examen de bachillerato. En otoño de ese mismo año me marché a Viena, donde vengo

residiendo desde entonces sin grandes interrupciones, obteniendo en 1929 la nacionalidad austríaca. En el semestre de invierno de 1924 me matriculé como oyente oficial en la facultad de filosofía y en un principio me dediqué a estudiar física, aunque luego me incliné por las matemáticas. Además, animado por el Profesor Schlick, de cuyo Círculo filosófico era asiduo, me ocupé también de trabajos modernos sobre epistemología. Mi actividad científica propia tenía que ver principalmente con los fundamentos de la matemática y con la lógica simbólica. En el año 1929 presenté mi tesis doctoral sobre un tema tomado de este campo, «Sobre la completud del cálculo lógico», doctorándome en febrero de 1930. En el mismo año presenté una disertación al congreso de Königsberg sobre ese trabajo, y en 1931 hablé en el congreso de la Asociación de Matemáticos alemanes en Bad Elster sobre la investigación que presenté como trabajo de habilitación. En Viena participé en el Coloquio organizado por el Profesor Menger y también colaboré en la preparación del informe anual que se publicó sobre el mismo. Asimismo participé en el seminario sobre lógica matemática que, bajo los auspicios del Profesor Hahn, se celebró en el curso 1931-1932, en lo relativo a la selección de temas y a la preparación de los oyentes para sus disertaciones.

En el año 1931, la redacción del *Zentralblatt für Mathematik,* del cual soy colaborador permanente, me pidió que elaborara junto con A. Heyting un informe sobre la investigación de los fundamentos de la matemática, en cuya preparación estoy ahora empeñado.
Viena, junio de 1932
Dr. Kurt Gödel]

El 1 de diciembre, Hahn presentó el siguiente informe sobre la solicitud de G (Christian, p. 263):

Schon die Doktordissertation hatte sehr hohen wissenschaftlichen Wert («Die Vollständigkeit der Azuine des logischen Funktionenkalküls»). Sie löste, indem sie zeigte, dass jede allgemeingültige Formel des engeren Funktionenkalküls beweisbar ist, das wichtige und schwierige von Hilbert gestellte Problem, ob die Axiome des engeren logischen Funktionenkalküls ein vollständiges System bilden. Die Habilitationsschrift «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme» ist eine leistung ersten Ranges, die in allen Fachkseisen dar Grösste Aufsehen erregte und —wie sich mit Sicherheit voraussehen lässt— ihren Platz in der Geschichte der Mathematik einnehmen wird. Es gelang Herrn Gödel zu zeigen, dass sich im logischen System der Principia Mathematica von Whitehead-Russell Probleme angeben lassen, die mit den Mitteln dieses Systems unentscheidbar sind, und dass dasselbe für jedes formallogische System gilt, in dem die Arithmetik der natürli-

chen Zahlen ausdrückbar ist; damit ist auch gezeigt, dass das von Hilbert aufgestellte Programm, die Widerspruchsfreiheit der Mathematik zu beweisen, undurchführbar ist.

Von einigen weiteren Arbeiten Gödels, die das Gebiet der symbolischen Logik betreffen, sei noch die Note «Zum intuitionistischen Aussagenkalkül» hervorgehoben, in der die Sätze bewiesen werden: Es gibt keine Realisierung des Heytingschen Axiomensystems des intuitionistischen Aussagenkalküls mittels endlich vieler Wahrheitswerte, für welche die und nur die beweisbaren Formeln bei beliebiger Einsetzung ausgezeichnete Werte ergeben. Es gibt unendlich viele zwischen dem Heytingschen System und dem System des gewöhnlichen Aussagenkalküls gelegene Systeme.

Die von Dr. Gödel vorgelegten Arbeiten überragen bei weitem das Niveau, das üblicherweise bei einer Habilitation zu beanspruchen ist. Dr. Gödel gilt bereits heute als erste. Autorität auf dem Gebiete der symbolischen Logik und der Forschung über die Grundlagen der Mathematik. In enger wissenschaftlicher Zusammenarbeit mit dem Referenten und mit Prof. Menger hat er sich auch auf anderen Gebieten der Mathematik aufs beste bewährt.

[La tesis doctoral tenía ya un altísimo valor científico («La completud de los axiomas del cálculo funcional lógico»). Al demostrar que todas las fórmulas universales del cálculo funcional en sentido estricto son demostrables, esa tesis resolvió el importante y difícil problema, planteado por Hilbert, de si los axiomas del cálculo funcional propiamente dicho forman un sistema completo. En cuanto al trabajo de habilitación, titulado «Sobre las proposiciones formales indecidibles de los *Principia Mathematica* y sistemas afines», es una obra de primera magnitud, que causó un verdadero impacto en todos los círculos especializados y —como cabe predecir sin vacilaciones— ocupará un lugar destacado en la historia de la matemática. El Sr. Gödel consiguió demostrar que en el sistema lógico de los *Principia Mathematica* de Whitehead-Russell cabe plantear problemas que son indecidibles con los medios del propio sistema, y que lo mismo sucede con todos los sistemas de lógica formal en los que es expresable la aritmética de los números naturales; de este modo, demostró también que el programa hilbertiano tendente a probar que la matemática está exenta de contradicciones era inviable.

De otros trabajos de Gödel relacionados con el campo de la lógica matemática cabe destacar también la nota «Sobre el cálculo intuicionista de predicados» en la que demuestra las proposiciones siguientes: no hay ninguna realización del sistema axiomático de Heyting del cálculo intuicionista de predicados mediante un número finito de valores de verdad para la que las fórmulas demostrables desde cualquier posición y sólo ellas den

valores determinados. Hay un sinnúmero de sistemas situados entre el sistema de Heyting y el sistema del cálculo clásico de predicados.

Los trabajos presentados por el Dr. Gödel superan con mucho el nivel que cabe exigir para una Habilitación. El Dr. Gödel es ahora mismo la primera autoridad en el campo de la lógica simbólica y de la investigación sobre los fundamentos de la matemática. En estrecha colaboración científica con el ponente y con el Profesor Menger ha demostrado también su excelencia en relación con otros campos de la matemática]

1933

El 11 de marzo G fue nombrado Privatdozent. Dio un curso en el Sommer Semester (semestre de verano) a un grupo relativamente amplio de unos 20 aluumnos (a juzgar por las fichas de inscripción conservadas por G). El anuncio del curso (Grundlagen der Mathematik) fue incorporado por G, escrito a mano en una hoja de papel, a un catálogo oficial que había sido impreso antes de la celebración de la Habilitación de G. El segundo curso, que G anunció e impartió en el semestre de verano de 1935, fue Augeswählte Kapitel der Mathematischen Logik. El tercero y último curso que impartió en Viena, Axiomatik der Mengenlehre (dos horas), se impartió de hecho en el Sommer-Semester de 1937, pero había sido anunciado con anterioridad dos veces, para el Winter-Semester de 1935/36 (Tag, Stunde and Ort der Vorlesung wird später bekanntgegeben) y para el Winter-Semester de 1936/37, n. Ü (esto es, nach Übereinkunft). La primera fecha se solapó con la breve visita de G a Princeton en el otoño de 1935, y en cuanto a la segunda, la culpa de que no se celebrara el curso la tuvo probablemente su mala salud. [En las carpetas 04/25, 31 y 36 se hallan notas fragmentarias relativas a los tres cursos.]

En 1938/39 G hizo una larga visita a América. En la primavera de 1939, mientras estaba fuera, se abolió el puesto no remunerado de Privatdozent y se sustituyó por el nuevo puesto remunerado de Dozent neuer Ordnung, que requería una nueva presentación. Su nombre fue incluido en una lista bajo Lehrbefugnis hat bis aut weiteres zu ruhen (*Personalstand der Universität Wien,* de 1 de julio de 1939, p. 55). Por razones complejas, G no se presentó para el nuevo puesto hasta el 25 de septiembre y la concesión se retrasó hasta el 28 de junio de 1940 (después de que G se hubiera instalado en Princeton; para más detalles, véase más abajo). No deja de ser irónico que

G fuese incluido en los catálogos entre 1941 y 1945 como Dozent für Grundlagen der Mathematik und Logik, y, que bajo las ofertas de cursos figure: «wird nicht lesen».

El 17 de mayo se presentó un trabajo hecho por K. Menger y A. Wald sobre geometría diferencial libre de coordenadas.

El 22 de junio se recibió para publicación el segundo ensayo sobre el «caso de Gödel» (mencionado antes, epígrafe 1929), apareciendo poco después. Este contiene el enunciado erróneo de que similares resultados «pueden ser probados también, mediante los mismos métodos, para fórmulas que contienen el signo =».

De acuerdo con el testimonio de G de 1976, prosiguió con sus estudios de lógica y de matemáticas durante 1930-1933, incluidos los fundamentos de geometría y «el precioso tema de las funciones de variables complejas»; asistió al seminario de Hahn sobre teoría de conjuntos, leyó las pruebas [probablemente en 1932] del libro de Hahn sobre funciones reales, y aprendió sobre el tema.

En el otoño G inició sus estrechos contactos con el I.A.S. El Instituto se había instituido formalmente en 1930; Albert Einstein y Ostwald Veblen fueron nombrados sus primeros profesores en 1932. Veblen desempeñó un importante papel invitando a H. Weyl, J. v. Neumann, M. Morse y J. Alexander a la escuela de matemáticas. También hizo los arreglos necesarios para que acudieran matemáticos visitantes, incluido Gödel. A Veblen le había impresionado mucho la conferencia de G (mencionada antes) a que había asistido en Viena en 1932; v. Neumann era naturalmente partidario de invitar a G.

La visita de G de 1933-1934 al I.A.S fue la más larga de las tres que hizo antes de fijar su residencia permanente allí en 1940. La duración de estas visitas puede inferirse de sus domicilios en Princeton antes de 1940: de octubre de 1933 a mayo de 1934, 32 Vandeventer Avenue; de octubre a noviembre de 1935, 23 Madison Street; de octubre de 1938 a enero de 1939, Peacock Inn. El año académico 1933-1934 fue el primer año de funcionamiento del Instituto, sin edificio propio y con los matemáticos usando el antiguo Fine Hall (ahora Jones Hall) de la universidad de Princeton. El *Boletín* oficial de este año incluye a G como un simple «trabajador».

El 30 de diciembre G impartió una conferencia en la AMS de Cambridge, Massachusetts. En el Nachlass se conserva un texto de la misma, titulada «La situación actual de los fundamentos de la matemática».

Menger: «En 1933, él [G] insistía repetidamente en que los *axiomas correctos* —a veces decía *rectos* (die rechten)— *de la teoría de conjuntos no han sido hallados aún.*» «Después de una sesión [del círculo] en que Schlick, Hahn, Neurath y Waismann habían hablado del lenguaje», G dijo, según Menger, «cuanto más pienso en el lenguaje, más me asombra que la gente se entienda entre sí».

1934

Entre febrero y mayo, G dio en el I.A.S un curso sobre sus resultados de incompletud. Las notas de Kleene y Rosser sobre este curso (editadas por G) han circulado ampliamente y fueron publicadas en Davis (1965) con un postscriptum de G que presenta el análisis de Turing del procedimiento mecánico (1936) como un avance esencial, toda vez que lleva los resultados de incompletud de G a una forma de compleción. Como consecuencia del trabajo de Turing, se puede ver que los teoremas valen «para todo sistema formal consistente que contenga cierta cantidad de teoría finitaria de números».

La innovación más notable de estas conferencias fue la introducción (en la última sección) por primera vez de un concepto claro de funciones generales recursivas, que él también estuvo cerca de identificar con la noción de computación finita (en la nota a pie de página 3). Pero en los años sesenta escribió a M. Davis para decirle que en aquella época no estaba en absoluto convencido de que su concepto de recursión comprendiera todas las recursiones posibles. Otro añadido (en la sección 7) lo constituye el teorema de que la verdad en un lenguaje no se puede definir en él, resultado que anteriormente había explicado en su carta a Zermelo de 1931.

En abril G dictó conferencias en Nueva York y Washington, DC. El texto de su conferencia «La existencia de proposiciones indecidibles en cualquier sistema formal que contenga a la aritmética» (el 18 de abril en la Sociedad Filosófica de Nueva York) se conserva en el Nachlass.

Es un hecho conocido que G y A. Church discutieron, probablemente a comienzos de 1934, la cuestión de hallar una definición precisa del concepto intuitivo de computabilidad, cuestión que tenía sin duda gran interés para G. Según Church, G planteó específicamente la cuestión de la relación entre el concepto intuitivo de

computabilidad y el de recursividad, mas no creía que las dos ideas pudieran identificarse satisfactoriamente «salvo heurísticamente»». G sugirió la idea de formular primero «un conjunto de axiomas que encerraran las propiedades generalmente aceptadas de» la noción intuitiva (M. Davis, Why Gödel didn't have Church's thesis, *Information and Control,* vol. 54, 1982, pp. 3-24, p. 9).

Por esta época, G solía conceder al ensayo de Turing de 1936 el mérito de ser el trabajo que al fin logra captar la noción intuitiva, y no mencionaba ni a Church ni a Post en relación con este tema. Es probable que pensara que Turing era el único que había esgrimido argumentos persuasivos tendentes a mostrar la adecuación del concepto preciso (por satisfacer los axiomas implícitos que determinan el concepto intuitivo). No es improbable, en concreto, que conociera los argumentos ofrecidos por Church en favor de su «tesis» y decidiera que eran inadecuados. Es indudable que G y Turing sintieron gran admiración el uno por el otro, pero también ocurrió que G estaba en Viena cuando Turing en Princeton (desde el otoño de 1936 al verano de 1938).

G abandonó Princeton para regresar a Viena en mayo, viajando del 26 de mayo al 3 de junio a bordo del *SS Rex*. A su regreso a Europa sufrió una crisis nerviosa, siendo tratado por el famoso psiquiatra J. von Wagner-Jauregg. En el otoño fue admitido en el conocido sanatorio de Purkersdorf bei Wein para ser tratado de una depresión nerviosa. Su proyectada visita al I.A.S. para la segunda parte de 1934/35 fue aplazada hasta el otoño de 1935.

Hahn falleció el 24 de julio tras una corta enfermedad (de unas tres semanas). Esto debe de haber afectado mucho a G.

En el coloquio del 6 de noviembre, tras la conferencia de A. Wald, G hizo la observación de que un análisis realista de la demanda en economía debe tener en cuenta la renta empresarial, cosa que depende del coste de producción.

Menger: «En conjunto, Gödel era más reservado después de su regreso de América que antes, pero seguía hablando con los asistentes al coloquio. Era generoso con sus opiniones y consejos sobre cuestiones lógicas y matemáticas con todos los miembros del coloquio. Veía enseguida con toda minuciosidad los puntos problemáticos y respondía con la mayor precisión en el menor número de palabras, descubriendo algunas veces aspectos nuevos para el investigador. Expresaba todo esto como si se tratara de la cosa más natural del mundo, pero generalmente con una timidez cuyo encanto des-

pertaba sentimientos personales de afecto hacia él en muchos de los que le escuchaban.»

G tuvo problemas con la dentadura este año (el «asunto de los dientes», mencionado varias veces en *LM*).

1935

Su comentario del ensayo de Waismann en el coloquio del 5 de junio fue mencionado sin citarlo.

El 19 de junio presentó una nota sobre la longitud de las pruebas. Esto brindó un primer ejemplo de lo que ahora se llaman «teoremas de aceleración» en la teoría de la complejidad computacional.

En el verano habló en la universidad de Viena sobre «tópicos escogidos de lógica matemática». Se conservan en el Nachlass nueve fichas de alumnos matriculados en este curso.

Desde 1930 había seguido pensando en el problema del continuo, siguiendo en cierta medida el esquema propuesto por Hilbert. La idea de usar la jerarquía ramificada se le ocurrió muy pronto. Luego se entretuvo desarrollando un número suficiente de ordinales. Por último, la decisión de tomar los ordinales clásicos como dados facilitó mucho las cosas. Debió ser en 1935, de conformidad con sus recuerdos de 1976, cuando se dio cuenta de que los conjuntos constructibles satisfacen todos los axiomas de la teoría de conjuntos (incluido el axioma de elección). Conjeturó que la hipótesis del continuo también se satisface. En el otoño, le contó en Princeton todas esas ideas y resultados a v. Neumann.

G inició su curso el 4 de mayo.

El 7 y el 10 de mayo E. Husserl pronunció dos conferencias en Viena sobre «Die Philosophie in der Krisis der europäischen Menschkeit». Estas conferencias forman parte del trabajo realizado por Husserl entre 1934 y 1937, en el que se ocupa explícitamente por primera vez de la relación entre filosofía e historia (véase su *Crisis*, analizada en la sección 8.2). Cabe presumir que G no asistió a estas conferencias, dado que su interés por la obra de Husserl surgió mucho más tarde y, en cualquier caso, no parece que abarque la realizada en la etapa de *Crisis*.

En septiembre, dejó Viena para ir a Princeton, viajando a bordo del transatlántico *Georgia* entre el 20 y el 28 de dicho mes. (Bernays iba en el mismo barco, pero, a diferencia de G, viajaba en la clase

turista.) Esta visita a Princeton fue la más breve de las tres que realizó. El 17 de noviembre cayó repentinamente enfermo, víctima de la depresión y el exceso de trabajo. O. Veblen le vio en Nueva York a bordo del transatlántico *Champlain* (que cubrió el trayecto a Le Havre entre el 30 de noviembre y el 7 de diciembre) y telegrafió avisando a la familia de G. Este pasó por París y se detuvo allí unos días. Desde allí telefoneó a su hermano y regresó a Viena en tren. (Menger: G «ha regresado a Viena en muy mal estado físico y mental».) El descanso y la recuperación (con periodos en el sanatorio) iban a cobrarse un largo tiempo.

1936

A comienzos de mismo año G empezó a pasar periodos en el (mismo) sanatorio de Purkersdorf bei Wien.

Según su propia relación de 1976, éste fue uno de los tres años en que su salud fue muy mala; los otros dos años fueron 1961 y 1970. Canceló sus compromisos docentes en algunas ocasiones. En 1939 escribió en un sitio que en 1936 había pasado varios meses en un sanatorio.

Menger: «Cuando le vi [a G] de nuevo en 1936, me dijo que estaba tratando de probar la consistencia de la hipótesis del continuo en teoría de conjuntos.»

Schlick fue asesinado el 22 de junio.

1937

G empezó dando un curso, en la primavera, sobre teoría de conjuntos (Axiomatik der Mengenlehre). En el Nachlass se conserva sólo una ficha de matrícula en este curso que corresponde a mi profesor Wang-Sian-jun (que allí se deletrea de otra manera). El profesor Wang me contó que había en el curso cinco o seis estudiantes. Al parecer A. Mostowski también asistió al curso. El curso versaba sobre conjuntos constructibles y sobre los resultados de G de 1935.

El 13 de julio v. Neumann escribió a G desde Budapest instándole a publicar sus resultados de 1935 en los *Annals of Mathematics*. Se vieron el 17 de julio. El 14 de septiembre v. Neumann volvió a es-

cribir a G desde Nueva York, esta vez aludiendo a la prueba de consistencia de la hipótesis generalizada del continuo (GCH). En 1976 y 1977 G me habló del asunto en diversas ocasiones, manteniendo en coherencia con esto que a los resultados más fuertes no llegó hasta 1938. También me dijo más de una vez que lograr la GCH es relativamente fácil una vez que se posee la noción de conjunto constructible. Una vez me llegó a decir incluso que v. Neumann pudo haber obtenido una prueba de la consistencia de GCH antes que él. Teniendo en cuenta que G no anunció sus resultados hasta 1938, no parece aventurado inferir que no estaba satisfecho de la prueba a que había llegado en 1937. De ahí que pensara que no había llegado a sus resultados hasta 1938.

Recientemente me he topado con alguna información adicional en la memoria de Menger. Menger empezó a trabajar en Notre Dame en enero (1937). G escribió a Menger el 3 de julio y el 15 de diciembre. La primera carta alude al «resultado parcial sobre la hipótesis del continuo sobre el que informé en el Coloquio» (en la primavera de 1937). También incluye la siguiente afirmación: «Como sabes, en América he tenido una mala experiencia con mi salud y por eso no quiero adquirir compromisos a muy largo plazo.» La segunda carta habla mucho acerca del trabajo de G sobre el problema del continuo: «Este verano pasado he proseguido mi trabajo sobre el problema del continuo y he logrado por fin probar la consistencia de la hipótesis del continuo (incluso en su forma generalizada) con respecto a la teoría general de conjuntos. Pero te ruego que de momento no le cuentes esto a nadie. Hasta ahora, aparte de a ti, sólo le he comunicado esto a v. Neumann, a quien presenté un esbozo de la prueba durante su última estancia en Viena. Ahora estoy tratando de probar también la independencia de dicha hipótesis, pero no sé si lo lograré.»

La madre de G regresó a Brno y G cambió de domicilio en Viena, viviendo, cuando no estaba en América, en Himmelstrasse 43, entre el 11 de noviembre de 1937 y el 9 de noviembre de 1939.

En 1976 me llamó la atención el que G hablara de los *veranos* de 1929 y 1930 como las épocas en las que probó la completud de la lógica elemental y obtuvo su primer resultado de incompletud... Poco antes, el 1 de junio de 1972, G me había confesado que se encontraba a gusto caliente [presumiblemente con ayuda de mantas y ropas] cuando la temperatura [de la habitación] ascendía a 75° F o más. No está claro desde cuándo esto había sido así para él, pero el

tiempo caluroso parece haberle sentado mejor. Me atrevo a conjeturar que, en general, los veranos tendían a ser la estación en que era científicamente más productivo. (La preferencia de G por el tiempo caluroso se ve también ampliamente confirmada por las cartas que le escribió a su madre, en las que le dice en varias ocasiones lo bien que se encontraba cuando hacía mucho calor en Princeton y con frecuencia no iba a la playa con Adele.) [«G era un hombre delgado y débil. Padecía de molestias estomacales crónicas y era sensible al tiempo frío. Podía vérsele en un día caluroso paseando por una calle de Princeton con abrigo. Confesaba que en cierta ocasión él y su mujer habían intentado ir a la costa de New Jersey a pasar las vacaciones de verano, pero que la habían encontrado demasiado fría para resultar confortable»; «No propuso ninguna filosofía sistemática, mas le vemos inclinándose hacia el idealismo o incluso hacia el racionalismo de viejo cuño» (Quine, *Yearbook 1978,* The Am. Phil. Soc., p. 84).]

No parece que haya ninguna información fiable del momento en que descubrió, en 1935, los conjuntos constructibles. Teniendo en cuenta que en el otoño comunicó a v. Neumann sus ideas sobre el particular y que antes no le había dicho nada, no parece improbable que el descubrimiento ocurriera en el verano. En cualquier caso, las circunstancias parecen indicar con toda exactitud la fecha del primer descubrimiento de G de (al menos una versión preliminar de) su prueba de consistencia relativa de GCH. A los datos de las dos cartas de v. Neumann se pueden añadir también las informaciones de Mostowski y el profesor Wang, según las cuales, en el curso sobre teoría de conjuntos impartido en la primavera no se sugirió nada de esta índole. En consecuencia, parece razonable suponer que el descubrimiento se produjo en el verano de 1937, con anterioridad a su encuentro con v. Neumann el 17 de julio. Por lo demás, una nota contenida en uno de sus cuadernos de trabajo indica que vislumbró la crucial idea durante la noche del 14-15 de junio (*Arbeitsheft 1,* carpeta 03/13 del Nachlass).

1938

En marzo se produjo la Anschluss (anexión política y económica) de Austria por Alemania; Austria se convirtió en una provincia (Ostmark) de una Alemania más grande.

Para el año 1938 les habían sucedido unas cuantas cosas a diversos profesores y amigos de los que se sabe o cabe suponer que tenían relación con G. Hahn falleció en 1934 (de muerte natural). Schlick fue asesinado cuando iba a dar la última clase del curso en 1936 por un antiguo alumno suyo que estaba loco. Karl Menger se marchó a comienzos de 1937 para ocupar un puesto permanente en la universidad de Notre Dame en Indiana. F. Waismann marchó para Inglaterra en 1937. O. Morgenstern y A. Wald marcharon a América en 1938. Todos estos acontecimientos debieron hacer de Viena un lugar menos atractivo a los ojos de G.

El 20 de septiembre G se casó con Adele Porkert tras una estrecha relación que se prolongó durante más de una década. Sobre la base de los pocos elementos de juicio que tengo, creo que se quisieron mucho uno al otro y que estaban muy a gusto juntos. Después de que se instalaron en Princeton en 1940, G no volvió nunca a Europa y además viajó muy poco; parece haber limitado su pequeño número de viajes a la costa este americana. En cambio Adele volvió a Europa unas cuantas veces. Según todos los informes, Adele tenía pocos amigos en Princeton y estuvo allí muy aislada desde el punto de vista social. Debe de haber llevado una vida un tanto solitaria en Princeton. En el funeral de G me dio la impresión de que la Sra. M. Morse era amiga suya. Cuando G vino a Harvard para recibir el doctorado «honoris causa» en 1952, en la recepción que tuvo lugar en la casa de Quine (en Belmont) la gente estuvo animando a G a que se trasladara allí. Recuerdo a Adele incitando a G a aceptar la idea, alegando que la gente de Harvard era mucho más sociable que los [que ella conocía] de Princeton. Adele parece que fue una mujer franca y sin pretensiones; parece que irradiaba un gran encanto personal. No tuvieron hijos. Ella le sobrevivió tres años, falleciendo el 4 de febrero de 1981.

Apenas dos semanas después de la boda, G dejó a Adele en Viena para irse a América. Viajó a bordo del transatlántico *New York* del 6 al 15 de octubre.

El primer semestre estuvo en Princeton, residiendo, de octubre a enero de 1939, en el Peacok Inn. Impartió un curso en el I.A.S. sobre su prueba de consistencia relativa del axioma de elección y la GCH. Una versión revisada de estas clases, basada en las notas tomadas por George W. Brown, se publicó en 1940 (añadiéndose notas en 1951 y 1966). El 9 de noviembre, presentó un anuncio de los resultados, que enseguida se publicó en PNAS, vol. 24 (1938), pp.

556-557. El 28 de diciembre pronunció una disertación sobre los mismos resultados ante el congreso anual de la Sociedad Matemática Americana (AMS) en Richmond y Williamsburg, el «abstract» apareció en la p. 93 del *Bulletin AMS,* vol. 45 (1939). [En el Nachlass se conserva un texto de la conferencia, titulada «La consistencia de la hipótesis generalizada del continuo».]

1939

En enero G visitó Notre Dame, en donde permaneció, en el Morningside Hotel, hasta mayo. Habló sobre sus resultados de consistencia e impartió, conjuntamente con Menger, un curso sobre lógica elemental. En el Nachlass se conservan todas esas clases, minuciosamente redactadas en inglés.

Menger ofrece más información sobre la visita de G a América de 1938 a 1939. La carta de G del 3 de julio de 1939 era una respuesta a la invitación de Menger para visitar Notre Dame, y contenía una aceptación provisional con la siguiente condición: «Es esencial para mí no comprometerme para más de *un* semestre» (por razones de salud). En su carta del 15 de diciembre de 1937, G dice «He decidido no ir a América en el presente año académico después de todo». «En la primavera de 1938 Gödel decidió pasar el año 1938-1939 en América.» El 25 de junio de 1938, G respondía a la carta de Menger de mayo, «He renunciado al plan de ir a América el próximo otoño porque sería demasiado agotador para mí. Iré en febrero de 1939, salvo que circunstancias externas me lo impidan». G también escribió a Menger desde Princeton el 19 de octubre y el 11 de noviembre de 1938. Menger destaca en todas estas cinco cartas (menos en la del 15 de diciembre) las repetidas deliberaciones de G acerca de qué cursos impartir en Notre Dame y en especial a sus dudas respecto de la necesidad de enseñar lógica introductoria.

G ofreció una concisa y elegante prueba de los principales resultados de consistencia relativa, prueba que fue recibida para su publicación el 14 de febrero y publicada en las pp. 220-224 de PNAS, vol. 25 (1939).

G trató de volver a Princeton en el otoño. [Es probable que recibiera su nombramiento anual de 1938 en adelante (y no desde 1940).] Pero los acontecimientos políticos se interpusieron.

El 14 de junio salió de Nueva York a bordo de un transatlántico

alemán, que llegó a Bremen el 20 de junio, y luego cogió el tren hasta Viena. Poco después se le notificó la inminencia de un reconocimiento médico militar. Este se retrasó durante meses y la II Guerra Mundial comenzó el 1 de septiembre. En contra de lo esperado, se le consideró «apto para el servicio de defensa». El 25 de septiembre solicitó el puesto de Dozent neuer Ordnung. La solicitud fue considerada el 30 de septiembre y comentada por el decano el 25 de octubre y también en una carta que el 27 de noviembre éste le dirige al rector de la Universidad de Viena. En cualquier caso, la solicitud no fue aceptada hasta el 28 de octubre de 1940, mucho después de que G hubiera salido para América.

La cuestión del estatuto de Dozent de G no está del todo clara. Hay documentos de julio y agosto en los que se dice que éste expirará el 1 de octubre de 1939 salvo que G emprenda alguna acción antes de esa fecha. (Sin embargo, véase la muy diferente información citada antes bajo el epígrafe 1933). Esta tal vez sea una de las razones por las que G solicitó el 25 de septiembre el puesto de Dozent neuer Ordnung, puesto que, además, a diferencia del viejo puesto de Dozent, estaba remunerado. Las otras razones tal vez estén en relación con el resultado de su reconocimiento médico militar y con los nuevos obstáculos que impedían su planeada visita a Princeton. Por lo que parece, la situación financiera de G también se estaba deteriorando en esta época. En noviembre solicitó permiso para ausentarse con objeto de ir a América alegando que no tenía fuente de ingresos. [Esto parece indicar que la solicitud de G del 25 de septiembre le permitía mantener un estatuto oficial en la Universidad de Viena. Su solicitud de permiso de ausencia probablemente fue cursada con el fin de incrementar las posibilidades de conseguir un permiso de salida.] En aquel momento G ya no podía aspirar a que el Consulado Americano le concediera una visa de visitante y hubiera sido difícil lograr el permiso de salida teniendo una visa de emigración. La carta del decano al rector (de 29 de noviembre) insinuaba que si G tuviera un puesto remunerado, no tendría razones para marchar. Mas no parece que la insinuación surtiera efecto.

En esta época G escribió (o planeó escribir) a Veblen en busca de ayuda para salir de su difícil situación. Hay un borrador de una carta fechada el 29 de noviembre en el Nachlass. El borrador contiene una oración tachada en relación con buscar un puesto en la industria como último recurso. La dificultad con la que se enfrentaba parece que era doble: con la solicitud de Dozent pendiente, no

tenía trabajo, y el no tener trabajo es de suponer que incrementaba la probabilidad de que se le llamara para cumplir el servicio militar. Al fin G y su mujer dispusieron de permisos de salida de Alemania (concedidos el 19 de diciembre) y de visas de inmigración *non quota* (concedidas el 8 de junio de 1940); ambos tipos de documentos parece que eran necesarios para salir tanto para Princeton como de su difícil situación. Según algunas informaciones, fue Abraham Flexner, el director del I.A.S., quien realizó con éxito la proeza de obtener las requeridas visas y permisos. Las visas para atravesar Rusia se expidieron en Berlín el 12 de enero de 1940.

El 15 de diciembre, en medio de sus esfuerzos por conseguir las visas (en Berlín) para su viaje a América, G impartió una conferencia en Göttingen. (Su pasaporte, conservado en el Nachlass, indica que tuvo que obtener en los consulados de Viena y Berlín varios permisos de tránsito.)

Según John Dawson, en noviembre, G y su mujer compraron su casa en Hegelstrasse 5 e invirtieron mucho dinero en arreglarla. Esto indica que, toda·ía en noviembre, contemplaban un futuro en el que estaba previsto el pasar buenas cantidades de tiempo en Viena. Mas resultó que G no volvió nunca a poner los pies en Viena después de su partida en enero de 1940.

Según WS, a comienzos de noviembre, G fue atacado cerca de Strudelhofstiege por estudiantes ultraderechistas.

La memoria de Menger incluye algunos detalles sobre la situación de G en 1939, especialmente durante su estancia en Notre Dame entre enero y comienzos de junio. «Durante su estancia en Notre Dame, Gödel parecía estar bien de salud, pero no muy feliz.» «G apreciaba a algunos lógicos escolásticos a los que consideraba precursores de G. Boole y A. de Morgan.» Un día, G le preguntó a Menger, «de repente»: «¿Hay una lista de todos los santos de la Iglesia católica?» «Mas, a pesar de los ruegos y advertencias de todos sus conocidos de Notre Dame y luego de todos los que hizo a su paso por Princeton, él [G] estaba decidido a volver a Viena y volvió. Al poco tiempo yo [Menger] oí rumores de que había sido atacado en una calle de Viena por exaltados nazis y que le habían roto las gafas.» G escribió a Menger el 30 de agosto de 1939; G decía que esperaba estar de nuevo en Princeton en otoño, pero no decía ni una palabra de los acontecimientos políticos ni de la atmósfera social de Viena.

Menger también informa de algunas de las ideas filosóficas ex-

presadas por G en 1939. «Las siguientes consideraciones eran argumentos importantes en favor de su pensamiento *filosófico:* 1) La suposición de clases [conjuntos] y la creencia en su existencia son tan legítimas como la suposición de cuerpos y la creencia en su existencia. 2) Las clases [conjuntos] son tan necesarias para un sistema matemático satisfactorio como los cuerpos para una teoría satisfactoria de las sensaciones y de la física.» G afirmaba «que no existían aún caracterizaciones adecuadas del dominio objetivo de los conjuntos en el que creía: caracterizaciones que sirvieran para decidir los problemas fundamentales de cardinalidad como la hipótesis del continuo. El expresaba cada vez con más énfasis esta convicción, pero yo [Menger] no le oí nunca la menor indicación acerca de dónde esperaba encontrar tales axiomas».

«Entre tanto, Gödel no estuvo nunca tan preocupado por Leibniz.» Menger le preguntó a G, «¿Quién podría tener *interés* en destruir los escritos de Leibniz?». «Naturalmente aquellos que no quieren que los hombres se vuelvan más inteligentes», fue la respuesta de G. A la idea de Menger de que Voltaire era un blanco más seguro, G respondió, «¿Quién se volvió nunca más inteligente por leer las obras de Voltaire». Más tarde (tal vez en la década de 1950 o después) Menger discutió las ideas de G acerca de la destrucción de los escritos de Leibniz con O. Morgenstern, el cual le contó cómo G, para ofrecer elementos de juicio en favor de su creencia, «le cogió un día en la biblioteca de la Universidad de Princeton y juntos hicieron acopio de una cantidad de material realmente asombrosa». El material se componía de libros y artículos con referencias exactas a obras de Leibniz publicadas, de un lado, y las series o colecciones citadas, de otro. Mas las obras citadas han desaparecido todas de un extraño modo u otro. «Este material era realmente asombroso», manifestó Morgenstern.

Capítulo 4

PROSIGUE LA RELACION: LOS AÑOS DE PRINCETON (1940-1978)

El año 1940 fue, en diversos aspectos, un año decisivo en la vida y la obra de G. Los siete u ocho meses que precedieron a su llegada a Princeton debieron ser enormemente duros y agotadores, y muy poco de su agrado. Por otro lado, el trasiego entre Viena y Princeton (más la excursión a Notre Dame) desde 1933 y la inestable vida que llevaba con Adele desde 1928 se acabaron con su llegada a Princeton. A partir de este momento G se mantuvo en un puesto que congeniaba mejor con él en el I.A.S. Ya no hubo más viajes largos ni grandes cambios en su vida, porque ya no eran necesarios, y G no era temperamentalmente propenso a hacerlos salvo que se viese obligado a ello. Sin embargo, casi todos los importantes resultados publicados por G en lógica matemática fueron concebidos y elaborados en Viena, y la parte relativa a la teoría de conjuntos, en medio de viajes y avatares de salud. Es preciso decir que durante este periodo G era más joven (tenía 23-32 años) y probablemente tenía más energía concentrada a su disposición. Una cuestión más indefinida la constituye la no tan fácil evaluación de su «anticuada dedicación» a la filosofía a partir de 1940.

En lo que se refiere a su trabajo intelectual, G publicó mucho menos desde 1940. Las veces que publicó o escribió con la intención de publicar (durante su vida entera), sus ensayos o conferencias fueron escritos, la mayoría de las veces, como respuesta a invi-

taciones u otros estímulos externos. Los tres ensayos sobre relatividad (dos publicados en 1949 y el tercero dictado como conferencia en 1950, publicado en 1952) también tuvieron su origen en la invitación (hecha en 1946) a colaborar en el homenaje a Einstein. En general, parece que la escasez de publicaciones de G a partir de 1940 es resultado de una concurrencia de varias circunstancias.

Durante este periodo, G había obtenido resultados matemáticos que serían publicables aunque se los juzgara con los más elevados criterios. Se abstuvo de escribir resultados menos fundamentales y no logró completar ni sus resultados de independencia en teoría de conjuntos ni tampoco su intento de establecer la CH mediante nuevos axiomas. [La razón por la que no completó su «prueba de consistencia general del axioma de elección» (de la que me habló en 1976) es menos clara.] De 1943 en adelante, la mayor parte del trabajo de G parece haber estado dedicado a la filosofía, ámbito en el que en algún momento (posiblemente ya en la década de 1940) empezó a tratar de construir un ambicioso sistema fundamental (de metafísica). Naturalmente, es sumamente difícil conseguir en filosofía el tipo de formulación definitiva que G estaba acostumbrado a exigir de su trabajo. Además, se daba cuenta de que el espíritu de los tiempos no congeniaba con sus tesis filosóficas. Esta cuestión del Zeitgeist actuó sobre él como un factor inhibidor, dada su tendencia a evitar la controversia y sobre todo las críticas que no estuviera a su alcance refutar de forma concluyente. Como consecuencia de ello, no se mostró dispuesto a dejar que sus ideas filosóficas afloraran más que «en pequeñas dosis», generalmente sólo en aquellos contextos en que le parecía que pisaba un terreno normalmente tenido por sólido.

1940

A mediados de enero, G y su mujer salieron de Viena, atravesaron Lituania y Letonia y llegaron a bordo del transiberiano hasta Bigosovo. (Debido al bloqueo británico después de la invasión germano-soviética de Polonia, no era posible salir de Europa por barco en ese momento.) Hicieron el trayecto hasta Yokohama y desde allí, por barco, hasta San Francisco, adonde llegaron el 4 de marzo. Luego se trasladaron en tren hasta Princeton, donde G inició su ininterrumpida y tranquila vida de casado durante los siguientes treinta y ocho años (menos dos meses).

Según E. Köhler, Hans Thirring vio a G inmediatamente antes de que partiera de Viena y le pidió que «advirtiera a Einstein de la posibilidad de una aplicación alemana de la fisión atómica para hacer bombas». G había estudiado tiempo antes con Thirring, «que había hecho una importante y temprana contribución a la teoría de la relatividad y era amigo de Einstein».

Desde 1940 parece que G no ha dado más que tres conferencias públicas (todas antes de cumplir los 46): las observaciones que fue invitado a hacer para la conmemoración del Bicentenario de Princeton en 1946 (el 17 de diciembre), la disertación ante el Congreso Internacional de Matemáticos de 1950 (el 31 de agosto, en Cambridge, Massachusetts), y la Gibbs Lecture en 1951 (el 26 de diciembre, en la Universidad de Brown). Los textos de las dos primeras de estas conferencias se publicaron más tarde; de la tercera sólo he visto un manuscrito a mano (en el Nachlass). G impartió también tres conferencias menos formales, dos en 1941 (véase más abajo) y una sobre los universos rotatorios (Princeton, mayo de 1949), así como dos series de conferencias en el I.A.S. en 1940 y 1941.

Los principales items entre sus publicaciones y manuscritos casi acabados se pueden resumir del siguiente modo. El ensayo sobre Russell (concluido en 1943), la conferencia de Princeton (1946), el expositivo y filosófico ensayo sobre el problema del continuo de Cantor (publicado en diciembre de 1947, y escrito entre 1946 y 1947 respondiendo a una invitación), los tres ensayos sobre relatividad y un manuscrito filosófico más largo (en varias versiones, probablemente iniciado en 1946 y continuado durante un año o dos), la Gibbs Lecture (escrita probablemente en 1951), el ensayo sobre la matemática y la sintaxis del lenguaje escrito con ánimo de criticar las ideas de Carnap (probablemente entre 1953 y 1956, del que hay seis borradores), el ensayo de 1958 para el homenaje a Bernays (basado en resultados técnicos obtenidos en 1941, escrito probablemente entre 1956 y 1958), los añadidos a su ensayo sobre Cantor (concluido en 1963), un postscriptum a sus conferencias de 1934 (fechado el 3 de junio de 1964), notas añadidas a sus ensayos sobre incompletud (fechadas el 28 de agosto de 1963 y el 18 de mayo de 1966), las dos cartas dirigidas a mí (de 7 de diciembre de 1967 y 7 de marzo de 1968), la versión inglesa ampliada de su ensayo de 1958 (escrita en su mayor parte probablemente entre 1967 y 1969, pero empezada mucho antes), sus contribuciones a mi *MP* (de octubre de 1971 a junio de 1972), y sus observaciones sobre sus re-

sultados relacionados acerca de los conjuntos constructibles (ocasionadas por las graves deformaciones en que se incurría en un ensayo descriptivo de su trabajo, compuestas entre abril y junio de 1977, citadas en la nota 17 de la sección 2.1).

G fue miembro ordinario del I.A.S. entre 1940 y 1946, recibiendo nombramientos anuales. En 1946 se convirtió en miembro permanente, en 1953 en profesor y en 1976 se retiró.

En Princeton, los G vivieron en viviendas de alquiler hasta septiembre de 1949 y compraron su casa de Linden Lane el 3 de agosto de 1949. La casa tenía primero el número 129 (al menos hasta el 1 de octubre de 1960), pero luego cambió al 145. En cierta ocasión G me contó que en algún momento ampliaron la casa con algunos añadidos. Sus domicilios (antes de establecerse en esta casa) son los siguientes: de marzo de 1940 a julio de 1941 vivieron en 245 Nassau Streèt, a lo que siguió un verano en Maine. Luego vivieron en 3 Chambers Terrace (de septiembre de 1941 a septiembre de 1942), 108 Stockton Street (de septiembre de 1942 a septiembre de 1943), y 120 Alexander Street (de septiembre de 1943 a septiembre de 1949).

Según *GQ*, G leyó por primera vez a Brouwer en 1940. Una vez me contó que la idea para su prueba de independencia (del axioma de elección) se le ocurrió leyendo un pasaje de la obra de Brouwer. Pero no especificó ni el pasaje ni el contexto.

Encontró serios errores en la disertación de Herbrand de 1930 indicando las correcciones oportunas, probablemente en algún momento entre 1940-1942.

En esta misma fecha obtuvo una prueba general de la consistencia del axioma de elección mediante consideraciones metamatemáticas (sintácticas). Creía (en 1976) sumamente probable que la prueba seguirá valiendo incluso cuando estén presentes cardinales grandes.

1941

Obtuvo su interpretación de la teoría intuicionista de números mediante funcionales recursivos primitivos, resultado que no publicó hasta 1958 (en el homenaje a P. Bernays), como parte de un ensayo en buena medida filosófico. Habló sobre estos resultados en Princeton y Yale. La conferencia de Yale, en la que estuvo presente

E. Artin, tuvo lugar el 15 de abril. El texto de esta conferencia (titulada «¿En qué sentido es constructiva la lógica intuicionista?» se conserva en el Nachlass).

1942

G llegó a una prueba de la independencia del axioma de elección en el marco de la teoría (finita) de tipos. El método parecía prometedor como vía para lograr también la independencia de la hipótesis del continuo, pero sus prolongados esfuerzos en este sentido no dieron fruto. En 1976 manifestó que a la luz de la última obra de Paul J. Cohen, está claro que la cosa es factible. En otro lugar dijo también que sus métodos estaban más cercanos a usar modelos booleanos que a forzarlos.

G y su mujer pasaron las vacaciones de verano en Maine (en Blue Hill House, Hancock Country). En el índice confeccionado por G para su *Arbeitshefte,* las pp. 26-57 del cuaderno 15 llevan como encabezamiento la expresión «Blue Hill». Estas páginas contienen extensas consideraciones sobre la independencia del axioma de elección. Cabe conjeturar que descubrió la prueba durante su estancia en Blue Hill House.

En 1976 G manifestó que lamentaba no haber proseguido el trabajo para llegar a una prueba de la independencia de la hipótesis del continuo. Es tentador comparar la falta de persistencia de G en este caso con lo que se ha llamado el «largo camino de la teoría especial a la teoría general de la relatividad» (recorrido por Einstein), especialmente desde «la idea más feliz de mi [la de Einstein] vida» («Si una persona cae en caída libre no sentirá su propio peso») de noviembre de 1907 (o de su vuelta a la teoría gravitatoria en junio de 1911) a su llegada el 24 de noviembre de 1915 a la teoría general tal como ahora la conocemos (Pais, pp. 179-179, 189, 253-256). Hay importantes diferencias entre la física y las matemáticas en estos dos ejemplos. Uno se siente inclinado a decir que Einstein estaba trabajando en un problema mucho «más rico» que presentaba más aspectos y diversas ramificaciones. De un modo enteramente contrario a lo que G solía hacer, Einstein parece haber realizado su búsqueda «en público» durante varios años. En cierta manera, el trabajo de G sobre los resultados de consistencia relativa conseguidos con ayuda de los conjuntos constructibles tuvo más visos de es-

fuerzo prolongado. Según su propia información, empezó a pensar en la hipótesis del continuo en 1930 y no obtuvo las pruebas definitivas hasta 1938.

Si suponemos que G concluyó su trabajo sobre la prueba de independencia a finales de 1942, entonces tenía casi exactamente la misma edad que Einstein en el momento de obtener sus «ecuaciones del campo gravitatorio» (unos pocos meses antes de cumplir los 37). Después de esto, Einstein siguió durante el resto de su vida dedicado a la física, mientras que G dejó de hacer lógica matemática pura.

Comparado con Einstein, disponemos de mucha menos información acerca del proceso de actividad intelectual de G. Es evidente que a ambos les interesaron primordialmente las cuestiones «fundamentales». Hay una diferencia clara entre la determinación de Einstein a confinar su investigación al ámbito de la física y el intento de G de conseguir también resultados concretos en filosofía (incluida la metafísica). Tras sus múltiples contribuciones de 1905, las dos cuestiones centrales para Einstein eran la generalización de la relatividad especial y el problema cuántico (Pais, p. 188). El éxito conseguido en la primera cuestión estuvo seguido de una década de transición gradual hacia una concentración exclusiva en el desarrollo de una teoría unificada del campo, que para él prometía también un modo indirecto de enfocar el problema cuántico de una forma más fundamental que la potente pero (para él) teóricamente insatisfactoria mecánica cuántica. Aunque generalmente se considera que Einstein ha estado, igual que G, dedicado durante las dos o tres últimas décadas de su vida a una «ocupación anticuada», no es posible detectar un esquema unificado comparable en la obra de G posterior a 1942.

La configuración de la obra de G anterior a 1940 es más propicia a examen. Dada su sólida preparación en matemáticas y la influencia del Círculo de Schlick, no era de extrañar que se sintiera atraído hacia la lógica y los fundamentos de la matemática. La posibilidad de lograr resultados precisos en áreas fundacionales, en donde prevalecen observaciones menos concretas y promesas programáticas, es intrínsecamente atractiva. Entre 1929 y 1930 resolvió, en rápida sucesión, la mayoría de los problemas fundamentales de la escuela de Hilbert. Una de las cuestiones que quedaba pendiente era hallar un concepto preciso que capturara la noción intuitiva de computabilidad. Pero en ese momento no estaba claro que el

problema fuera susceptible de una respuesta definitiva. Debió de darse cuenta de que la siguiente área fructífera era la teoría de conjuntos: «jetzt, Mengenlehre». Es muy probable que se sintiera sorprendido por la solución de Turing, que era más elegante y concluyente de lo que se había esperado.

Una conjetura que puede hacerse es que su interés primordial a partir de 1930 estaba en comprender los fundamentos de la teoría de conjuntos. Un tópico más concreto pero igual de provocador por el que era natural optar lo constituía el problema del continuo, sobre el que, por lo demás, Hilbert había hecho sugerencias esclarecedoras pero no había logrado llegar a nada concluyente. Como había pocas perspectivas de poder probar o refutar la hipótesis del continuo de un modo concluyente, la estrategia predilecta de G consistente en «dividir las dificultades» le llevó a la cuestión más clara y más débil de su independencia o consistencia relativa a los conocidos axiomas de la teoría de conjuntos. Resultó que una mejora del enfoque de Hilbert no sólo se tradujo en el resultado de la consistencia relativa, sino también en la estructura enormemente atractiva de los conjuntos constructibles. La búsqueda de una prueba de independencia constituía obviamente el siguiente paso, y es a ella a lo que es más verosímil que G haya dedicado su atención desde 1939 o incluso antes. (Su intento de lograrla es mencionado en su carta, citada antes, del 15 de diciembre de 1937 a Menger.)

Pero G tenía en la mente cuestiones más amplias aunque menos concretas, entre las cuales la independencia de CH iba a constituir un paso absolutamente impresionante y no controvertido. Para los fundamentos de la matemática resultan básicos una jerarquía de idealizaciones cada vez más ricas y el problema de la evidencia (relativa) de tales idealizaciones. La interpretación hecha por G en 1941 de la matemática intuicionista es una clara contribución a hacer a ésta más evidente. La búsqueda de una prueba de independencia para la CH estaba también dentro de la línea de hacer más explícita la idealización consistente en considerar conjuntos arbitrarios (y, en especial, los de los enteros), o, en el lenguaje predilecto de G, la búsqueda de los axiomas que determinan el concepto de conjunto. De ahí que los principales resultados técnicos y parciales obtenidos entre 1940 y 1942 (o 1943) formen parte todos ellos del programa de consolidación de las idealizaciones y de determinación de la naturaleza de su evidencia (relativa).

Después de su llegada a Princeton (en compañía de Adele) en

marzo de 1940, G se hallaba en condiciones de planificar su futuro trabajo con una gran dosis de libertad. Tenía en su haber unos cuantos resultados importantes y por fin podía hacer una estable vida de casado. No existían presiones ni internas ni externas inmediatas para completar cualquier proyecto inacabado o para conseguir enseguida nuevas cimas. Gozaba de una salud relativamente buena y podía contemplar ante sí un largo periodo de paz y tranquilidad, desprovisto de la necesidad de viajar o de cambiar de trabajo. Por lo que parece, se propuso no sólo trabajar en una gran cantidad de temas de lógica matemática, sino también prestar más atención a sus intereses filosóficos. Así por ejemplo, entre mayo de 1941 y el 18 de noviembre de 1942, llenó cinco de sus cuadernos filosóficos (cuadernos 4-8, que contabilizan en total 670 páginas). Este hecho concuerda con su testimonio de que interrumpió su frustrante trabajo sobre la independencia de CH debido en parte a su interés por la filosofía, y, en especial, por la relación que ésta guarda con los conceptos científicos básicos.

Creo que el cambio de rumbo tuvo también que ver con lo decepcionante del impacto de la lógica matemática sobre otras partes de la matemática. Así por ejemplo, sus resultados de incompletud no llevaron a ningún prometedor enfoque encaminado a mostrar la independencia (o, acaso, también la verdad) de las famosas conjeturas de Fermat, Goldbach, Riemann, etc... Yo creo que G había esperado de los progresos en los estudios fundacionales un impacto más claro sobre la práctica matemática. Así por ejemplo, al final de su ensayo sobre la lógica de Russell (acabado en 1943) se expresaba del siguiente modo:

> Muchos síntomas muestran muy claramente, sin embargo, que los conceptos primitivos están necesitados de ulterior clarificación. Parece razonable sospechar que es a esta comprensión incompleta de los fundamentos a lo que se debe que la lógica matemática no haya colmado hasta ahora las altas expectativas de Peano y otros que (de acuerdo con las pretensiones de Leibniz) habían esperado que facilitaría la matemática teórica en la misma medida en que el sistema decimal de números ha facilitado las computaciones numéricas. Pero ¿cómo esperar poder resolver problemas matemáticos mediante el mero análisis de los conceptos que aparecen, si nuestro análisis no es hasta el momento suficiente siquiera para establecer los axiomas?

Aunque normalmente G espera obtener en filosofía resultados

tan definitivos como en la ciencia, no deja de subrayar la distinción que existe entre analizar (o elucidar) conceptos en filosofía y emplear conceptos en la ciencia (en especial en la matemática). Así por ejemplo, yo creo que considera la justificación que Turing da de la adecuación entre su concepto preciso y la noción intuitiva de computabilidad como un ejemplo de trabajo filosófico. Pero, en algunos casos, los anhelados conceptos precisos son más esquivos; G parece exigir, por ejemplo, de la filosofía un análisis del concepto de tiempo más radical que el hecho en física.

A la vista de lo que sabemos hoy, parece probable que si G hubiese discutido sus ideas sobre las pruebas de independencia con algunos matemáticos competentes, hubieran podido lograrse progresos más concretos sobre la CH. Es evidente que G tenía el hábito de trabajar aislado, pero no conozco todas las razones para esta práctica. Según Straus, tanto G como Einstein creían «que el pensamiento, la búsqueda de la verdad, es una ocupación enteramente solitaria» y ambos vieron como un milagro el que, en una ocasión, Einstein y Strauss resolvieran un problema discutiendo sus ideas durante media hora (Holton y Elkana, p. 420). Cabe mantener, desde luego, que las ideas «verdaderamente originales» sólo pueden obtenerse mediante el trabajo solitario. Pero la cuestión de las condiciones para (diferentes tipos de) la colaboración fructífera es muy compleja. Así por ejemplo, según el informe del propio Einstein, él tenía grandes dificultades para desarrollar su teoría especial de la relatividad y, en la primavera de 1905, fue a hablar con su amigo M. A. Besso: «Discutiendo largamente con él, de repente capté la cuestión» (Pais, p. 139).

El 18 de noviembre, P. A. Schilpp escribió a G invitándole a colaborar con un ensayo sobre «la lógica matemática de Russell», diciéndole que Russell «le considera a usted el sabio *par excellence* en este campo». Parece que él aceptó la invitación y que empezó a trabajar en él enseguida.

1943

El 17 de mayo G presentó el manuscrito sobre Russell. Cuando el 28 de septiembre estuvo lista una versión revisada, Russell había concluido sus respuestas y G le escribió tratando infructuosamente de cambiar su decisión de no responder. Cuando estuvo claro que

Russell no iba a hacerlo, G consideró la posibilidad de retirar su trabajo, pero al final sucumbió a las súplicas de Schilpp. La respuesta de Russell a sus críticos lleva la fecha de julio de 1943 y concluye con una nota en la que se disculpa por no haber podido responder a la tardía contribución de G. (Visto retrospectivamente, hay que lamentar que Schilpp no le haya hecho llegar a Russell la versión de mayo; es obvio que pudo haber mantenido su correspondencia editorial con G al mismo tiempo. Pero como la nota de Russell llevaba la fecha de julio de 1943, no se comprende que Schilpp no le enviara la versión de mayo. En cualquier caso, lo que sí parece es que, en esa época, Russell ya no era probablemente capaz de ocuparse sensatamente del ensayo de G.)

El rico contenido y meticuloso cuidado de este ensayo muestra un amplio y concentrado trabajo por parte de G. Este es probablemente el año en que la atención de G cambió decisivamente de (la obtención de nuevos resultados en) el campo de la lógica matemática a la filosofía (con especial énfasis en la filosofía de la matemática y sus más amplias implicaciones para la filosofía general).

1944

El artículo referente a Russell se publicó en el volumen de Russell (1944) y se reeditó con cambios menores en 1964 y 1972. En cierta ocasión me describió este artículo como una historia de la lógica con especial referencia al trabajo de Russell. Hay que destacar lo natural y centralmente que encaja el trabajo del propio G sobre incompletud y conjuntos constructibles en el marco de este artículo.

El 30 de noviembre, Russell hizo una infructuosa tentativa de lograr un puesto en el I.A.S.; y este propósito se mantuvo algún tiempo, recibiendo el apoyo de Einstein, Veblen y Weyl. Finalmente, Russell pasó algún tiempo en Princeton (sin vinculación a ninguna institución) antes de regresar a Inglaterra en mayo de 1944. En su *Autobiografía,* Russell declaraba: «Mientras estuve en Princeton llegué a conocer muy bien a Einstein. Solía ir a su casa una vez a la semana para discutir con él, con Gödel y con Pauli... los cuales eran todos ellos judíos, exiliados y cosmopolitas en la intención, ... Gödel resultó ser un platónico sin adulteraciones, y parecía creer que un eterno «no» estaba alojado en los cielos, en donde los lógicos virtuosos podían esperar encontrarlo en la otra vida.»

En 1971 Kenneth Blackwell llamó la atención de G sobre este parágrafo y G escribió en borrador la siguiente respuesta (que nunca envió):

En lo que se refiere al pasaje que a mí me concierne, tengo que decir *en primer lugar* (en honor a la verdad) que no soy judío (aunque no creo que esta cuestión tenga importancia), 2) que del pasaje se saca la errónea impresión de que tuve muchas discusiones con Russell, cosa que dista mucho de ser el caso (tan sólo recuerdo una). 3) En lo que respecta a mi «platonismo sin adulteraciones», no es mayor que el que Russell mantenía en 1921 cuando en la *Introduction to Mathematical Philosophy* [publicada por primera vez en 1919, p. 169] afirmaba «[La lógica se ocupa del mundo real exactamente igual que la zoología, aunque de sus rasgos más abstractos y generales]». En esta época es evidente que Russell había encontrado el «no» incluso en este mundo, pero más tarde por influencia de Wittgenstein optó por dejarlo de lado.

Cabe observar de pasada que la oración citada por G es su favorita y que concuerda perfectamente con sus propias ideas. Desde luego la influencia ejercida por Wittgenstein sobre Russell a este respecto, indicada con toda exactitud por G, sigue siendo hasta hoy un gran misterio.

1945

A comienzos de 1951, a G hubo que administrarle transfusiones de sangre por haber demorado el tratamiento adecuado de una úlcera hemorrágica de duodeno. Después, tuvo que seguir una severa dieta. (La fecha de este evento, antes conjeturada como el año más probable dentro de la década de 1940, es 1945. Rudolf Gödel está ahora de acuerdo en que la información de *LM* es correcta.) Un informe establece que «en sus últimos años esto [las secuelas de la enfermedad] agravó los trastornos de próstata a los que él llamaba "debilidad de vejiga", cuyos efectos cuando menos deprimentes son bien conocidos» (Kreisel, p. 153).

RG: «Posteriormente, en Princeton, padeció una úlcera de duodeno con intensa hemorragia. A partir de entonces vivió sometido a una dieta *tan estricta* que perdía continuamente peso y padecía desnutrición.

»No comprendo por qué después de la II Guerra Mundial mi

hermano no volvió a Viena de visita. El dio como razón que en Viena tal vez no hubiera podido seguir la dieta requerida(?).

»Sin embargo, nos invitó a su madre y a mí varias veces a Princeton donde pasamos muchas horas felices con él y con su mujer.»

La colección *LM* se inicia con una carta, fechada el 7 de septiembre, de G a su madre y su hermano. Durante el año anterior, G había estado escribiendo cada dos meses más o menos a través de la Cruz Roja, pero al parecer esas cartas no fueron recibidas. «Estamos bien y acabamos de regresar de nuestras vacaciones veraniegas en la costa, donde hemos estado unos días.»

El 30 de noviembre L. R. Ford invitó a G a escribir un ensayo expositivo sobre el problema del continuo de Cantor. En agosto de 1946 estaba listo un primer borrador.

1946

G inició una frecuente y regular correspondencia con su madre, que perduró hasta la muerte de ella en 1966.

En su carta de 22 de enero G escribía que su puesto en el Instituto acababa de ser hecho definitivo. Efectivamente, éste es el año en que se convirtió en miembro permanente.

«Acabo de alcanzar la edad de 40 años, ya más que los que tenía papá al comienzo de la primera guerra mundial» (carta de 28 de abril).

Adele estaba deseando visitar Viena «a toda costa» (21 de julio). Einstein era mencionado por primera vez en *LM* (en la misma carta, véase la sección 1.5 para una amplia relación de items de *LM* que tienen que ver con Einstein).

G fue invitado a hablar el 17 de diciembre en el Bicentenario de Princeton antes de la conferencia sobre problemas de las matemáticas. Una transcripción de esas «observaciones» se halla publicada únicamente en Davis 1965. En analogía con la computabilidad (absoluta), sugirió la idea de estudiar los conceptos de demostrabilidad absoluta y definibilidad absoluta. En lo que al primero de ellos respecta, sugirió la introducción de axiomas de infinitud cada vez más fuertes que sean verdaderos y tengan una «cierta estructura formal (decidible)» y propuso una importante conjetura: «No es imposible... que toda proposición expresable en teoría de conjuntos sea de-

cidible a partir de los actuales axiomas más alguna aserción verdadera acerca de la extensión del universo de todos los conjuntos.» En relación con el segundo, introdujo por primera vez lo que ahora se conoce con el nombre de «conjuntos definibles ordinales» y conjeturó (esta vez en un sentido fuerte del término) que el axioma de elección es satisfecho por estos conjuntos, cosa que no ocurre con CH. (Estas observaciones son ejemplos palpables de cómo se las ingeniaba G para ser sumamente preciso sobre cuestiones respecto de las cuales a la mayoría de nosotros nos parece imposible serlo.)

G fue invitado (parece que en junio) por Schilpp a colaborar en un homenaje a Einstein, y aceptó la invitación. Sólo puedo conjeturar las razones por las que Schilpp invitó a G en esta ocasión. Una posibilidad es que Einstein sugiriera su nombre. Otra, es que en 1946 Schilpp supiera del estrecho contacto existente entre G y Einstein.

En este año G escribió a C. A. Baylis confesándole que «la verdadera razón» por la que no se había hecho antes miembro de la Asociación de Lógica Simbólica era su temor a que «se contara con» la prestación de servicios en oficinas o comités... Esto indicaría la renuencia de G a ocupar puestos que requieran servicios administrativos. A la gente le ha extrañado la lenta promoción de G en el I.A.S. Hay varias causas que podrían haber operado conjuntamente. 1) Fue debido a la oposición personal de algún colega anónimo. 2) Algunos colegas pensaban que G no hubiera acogido bien las responsabilidades administrativas que conlleva el ser profesor. 3) Otros creían que su sentido de la responsabilidad y su mentalidad legalista podrían entorpecer la toma eficiente de decisiones por parte del profesorado. Yo no he oído nunca hablar directa o indirectamente de que G se haya quejado alguna vez del trato que le dio el I.A.S.

1947

El 16 de marzo (véase *LM*) G manifestaba que tenía que acabar en las semanas siguientes su colaboración para un libro. «Ya he dedicado mucho tiempo a su preparación, pero el tema del artículo me interesa muchísimo.» No cabe duda de que esto se refiere a su trabajo sobre Kant y Einstein.

Después de muchísimos esfuerzos, Adele partió por fin para Europa a bordo del barco *Marine Flasher*. Estuvo fuera aproximada-

mente los siete meses siguientes (véanse las cartas de G de 12 de mayo y 9 de diciembre en *LM*).

El 28 de diciembre G escribía que la semana anterior había concluido el manuscrito de su nuevo artículo. Cabe suponer que se trata de su discusión del problema del continuo de Cantor, que se publicó en diciembre (una versión revisada y ampliada se publicó en 1964). Esta (especialmente la versión ampliada) es una de las principales publicaciones filosóficas de G. Pero la carta de G del 7 de noviembre da a entender que el ensayo supuestamente acabado en septiembre no es sino el dedicado a Kant y Einstein, ya que en esta ocasión decía que quedaba mucho por hacer sobre el ensayo.

E. G. Straus siguió siendo este año ayudante de Einstein (véase la sección 1.5). Según él, «como era nuestra costumbre, recogimos a G para regresar a casa para el almuerzo», y Einstein «tenía muchos amigos, algunos muy íntimos, como es al menos el caso de Wolfang Pauli y, en especial, de Kurt Gödel» (Holton y Elkana, p. 420). (Pauli pasó los años 1940-1946 en el I.A.S.) Un contrapunto parece establecerse en las siguientes palabras: «El único hombre que fue, durante los últimos años, el mejor amigo con mucho de Einstein, y en algunos aspectos el que extrañamente más se le parecía, es Kurt Gödel, el gran lógico. Eran muy distintos en casi todos los aspectos personales —Einstein gregario, feliz, lleno de buen humor y de sentido común, Gödel extremadamente solemne, muy serio, muy solitario y lleno de desconfianza hacia el sentido común como medio de alcanzar la verdad. Pero ambos compartían una cualidad fundamental: iban directa y entusiásticamente a los problemas verdaderamente centrales de las cosas» (*ibíd*, p. 422).

Por lo que se sabe de sus actividades, cabe señalar también otras comparaciones. Einstein sentía una antipatía natural hacia la gimnasia y los deportes —enseguida se cansaba y se fatigaba; en el colegio sacaba las notas más altas o andaba cerca en matemáticas y en latín (Pais, p. 37). En estos aspectos G se parecía a Einstein, pero en la segunda mitad de su vida, éste gozó de mejor salud y fue más racional en lo que se refiere a su salud y en su actitud hacia los médicos. Mientras que en sus años mozos Einstein tuvo que preocuparse de ganarse la vida, G no tuvo problemas en ese sentido al menos hasta los primeros años de la treintena. Es difícil calibrar qué efectos tuvo esta diferencia en cuanto a seguridad financiera sobre sus posteriores estilos de vida. Desde luego, Einstein fue más proclive que G a la interacción con otros y a hacer públicas sus ideas.

1948

G trabajó probablemente sobre teoría de la relatividad y su relación con la filosofía. El 10 de mayo manifestaba que, durante varias semanas, había estado tan obsesionado con un problema que no había podido dejar de darle vueltas, a pesar de sus esfuerzos por interrumpir el trabajo. «Hasta en un cine o con la radio puesta, sólo podía escuchar con medio oído... Ahora he resuelto la cuestión hasta tal punto que puedo de nuevo dormir plácidamente.» Es muy probable que este trabajo que lo tuvo tan ocupado tuviera que ver con su ensayo sobre Einstein.

En relación con la entrevista a que tenía que someterse para obtener la ciudadanía americana, una vez me contó que para tal ocasión había estudiado cómo los indios habían llegado a América. Einstein y O. Morgenstern fueron sus testigos, y Morgenstern ha hablado a diversas personas de aspectos del evento. Así, H. Zemanek y E. Köhler (véase el informe de Zemanek, *Elektronische Rechenanlagen,* vol. 5, 1978, pp. 209-211) refieren la siguiente anécdota. Aunque el examen que G tenía que pasar no encerraba ninguna dificultad, G se preparó seriamente para él y se estudió la constitución americana con todo detalle. Un día antes de la entrevista, G le dijo a Morgenstern que había descubierto una posibilidad lógico-legal de transformar los Estados Unidos en una dictadura. Morgenstern vio que la hipotética posibilidad y su probable remedio suponían una compleja cadena de razonamiento, y que su consideración no resultaba lo más indicado para la entrevista, por lo que aconsejó a G que no dijera nada de su descubrimiento.

A la mañana siguiente, Morgenstern trasladó en coche a Einstein y a G desde Princeton hasta Trenton. Einstein estaba informado; por el camino, contó una historia tras otra para distraer a G de sus explicaciones teórico-constitucionales, aparentemente con éxito. En la oficina de Trenton, el oficial encargado era el juez Philip Forman, que era el que, en 1940, se había encargado del caso de Einstein y con quien este tenía una estrecha amistad. Los saludó amablemente y les invitó a los tres a asistir al examen (normalmente privado) de G.

El juez empezó diciendo, «usted tenía hasta ahora la ciudadanía alemana». G le interrumpió, «perdone señor, austríaca». «¡Ah ya, el maldito dictador!, pero, afortunadamente, eso no es posible en América.» «Al contrario», le interrumpió G, «yo sé cómo puede su-

ceder». Entonces los tres aunaron sus esfuerzos para refrenar a G con objeto de poder volver a la rutina del examen.

G y Adele prestaron su juramento de ciudadanía el 2 de abril de 1948. Según una carta de G del 10 de mayo, lo hicieron a la vez 10 candidatos, y el magistrado, que era amigo personal de Einstein, les dio una charla como de una hora. Con anterioridad, el 11 de enero, G manifestó que él y Adele habían pasado su examen, siendo testigos Einstein y Morgenstern. El 9 de diciembre de 1947 ya había declarado que probablemente lograría la ciudadanía en un par de meses. De ahí que sea probable que el examen haya tenido lugar a finales de 1947.

1949

El 17 de enero G manifestaba que el año 1949 le había sentado muy bien, aludiendo, por lo que parece, a un buen estado mental.

G publicó en julio nuevas soluciones a las ecuaciones einsteinianas del campo (con «universos rotatorios» que permiten «viajar en el tiempo» hacia el pasado), así como (en diciembre) el examen de la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía idealista en el volumen dedicado a Einstein. La respuesta de éste celebra el descubrimiento de G como un importante avance y reconoce sus dudas anteriores en torno al concepto de tiempo global.

El ensayo técnico fue escrito sin duda antes que el filosófico, que fue acabado en marzo. En su carta del 21 de marzo, G manifestaba que había estado muy ocupado, sin duda dándole al ensayo filosófico su forma definitiva. Como informaba en su carta del 28 de mayo, también dio una conferencia por primera vez en muchos (unos 8) años, en el Instituto, sobre teoría de la relatividad.

G y Adele compraron su casa de Linden Lane y se trasladaron a ella el 1 de septiembre.

En febrero visité en el I.A.S. a v. Neumann y hablé con G por teléfono. En la primavera, expliqué en Harvard los teoremas de incompletud de G, siendo esta la primera vez que se explicaban en Harvard tales resultados con alguna minuciosidad. En julio visité a G en su amplio despacho de Fuld Hall; esta fue la primera vez que le vi. [Después, hubo un periodo en que, al parecer por decisión propia, ocupó despacho(s) más pequeño(s) en Fuld Hall.]

1950

G presentó el 31 de agosto ante el congreso Internacional de Matemáticas una comunicación en la que ampliaba su trabajo anterior sobre los universos rotatorios. En las cartas del 21 de agosto y 29 de septiembre a su madre hace alusión a su charla y a la buena acogida que tuvo.

A esta época corresponde un manuscrito (con varias versiones), titulado «Algunas observaciones acerca de la relación entre teoría de la relatividad y filosofía kantiana». [Según David Malament, que ha examinado el manuscrito, probablemente fue escrito antes de 1949, ya que en él no se hace referencia a resultados relevantes de 1949 y 1950.]

«Hay que destacar que el interés de G por la relatividad iba más allá de lo puramente teórico. En su ensayo defiende la posible relevancia de sus modelos para nuestro propio mundo, en el Nachlass hay dos cuadernos de notas dedicados a tabulaciones de las orientaciones angulares de las galaxias (que G esperaba que podrían exhibir una dirección privilegiada). Freeman Dyson ha señalado que G mantuvo un gran interés por tales datos observacionales incluso bastante después» (Dawson, 1984).

En su carta de 1 de noviembre (y en la de 8 de enero de 1951) G respondía «sí» a la pregunta materna de si en ese momento estaba trabajando en «cosmología».

En 1950-51 estuvo en Zurich, donde llegó a conocer bien a Bernays y a E. Specker.

1951

G enfermó y tuvo que ser hospitalizado durante un tiempo en febrero o por ahí (debido a una úlcera hemorrágica, véase 1945), como informaba en su carta de 17 de marzo (en *LM*).

G recibió el premio Albert Einstein (compartido con Julian Schwinger) el 14 de marzo; v. Neumann pronunció su elogio, comenzando con estas palabras: «El logro de Gödel en la lógica moderna es singular y monumental —más que monumental, es una señal que permanecerá visible lejos en el espacio y en el tiempo» (*New York Times*, 15 de marzo, p. 31).

D. Litt. por la Universidad de Yale. (Quine había propuesto a

G este año o incluso antes para un doctorado honorario en Harvard, pero Harvard no se decidió a dar el paso hasta un año después que Yale.) El 28 de junio, G decía de los galardonados, «Yo era el más joven con mucho; todos los demás tenían 60 años o más».

G planeó visitar a su madre en el otoño, pero no lo hizo. Como es natural, su madre se sintió muy defraudada. El 12 de noviembre G tuvo que responderle que, naturalmente, él estaba más que deseoso de ir a Europa a verla.

G trabajó probablemente en su Gibbs Lecture titulada «Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas», que fue impartida en la tarde del 26 de diciembre en Providence. Yo asistí a la sesión. Algunas de las ideas contenidas en esta conferencias se hallan recogidas en mi *MP* (p. 324), en una forma que en 1972 manifestó ser de su agrado.

1952

Sc. D. por la Universidad de Harvard. En esta ocasión, vinieron a Harvard G y su mujer y yo estuve cenando con ellos en casa de Quine. La Sra. G coleccionaba los periódicos locales que daban cuenta de la ceremonia de Harvard. En su carta de 22 de julio G se hacía eco con satisfacción de la cita en la que se lo consideraba «el descubridor de la verdad matemática más significativa de este siglo».

El 31 de octubre escribía, «Durante los dos últimos meses he estado tan ocupado con la política que casi no he tenido tiempo para ninguna otra cosa».

1953

En marzo Adele hizo un viaje a Europa.

G fue nombrado al fin profesor del I.A.S. a los 47 años. En la carta de 25 de marzo le contaba a su madre que no tendría obligaciones docentes, aunque el sueldo fuera más alto que en las universidades. R. Bott contó que por esta época había estado sentado (en una cena) cerca de G, que le habló de la promoción con satisfacción. En 1976, G me contó que su obra en el Instituto se había desplegado en tres frentes: el trabajo del Instituto, las matemáticas y la

filosofía. Cabe suponer que el trabajo del Instituto (o la mayor parte de él) no comenzó hasta que se convirtió en profesor. En el acto conmemorativo del 3 de marzo de 1978, H. Whitney señaló que G había estado profundamente interesado en los asuntos del Instituto. Fue difícil, declaró Whitney, nombrar un nuevo miembro visitante en lógica debido a que G no pudo «demostrarse a sí mismo que algunos de los candidatos no debieran ser miembros, con la evidencia que tenía a mano».

A Adele no le faltaron cosas ingeniosas que contar acerca del Instituto. «En una ocasión, pintó el I.A.S. al que solía llamar *Altersversorgungsheim* (hogar de pensionistas), repleto de lindas estudiantes que hacían cola a la puerta del despacho de los profesores permanentes.» También, «lo describió, cariñosamente, como un *strammer Bursche*» (Kreisel, pp. 154-155 y 153).

En la carta de 31 de octubre manifestaba que había estado ocupado con la reciente visita de 14 días de un famoso profesor (de 72 años) que había venido de Holanda, aludiendo claramente a Brouwer.

1954

Carnap visitó el I.A.S. de 1952 a 1954. No he visto ningún informe sobre su relación con G durante este periodo. De hecho, en las páginas dedicadas a esta amplia visita en su *Intellectual Autobiography,* el nombre de G está llamativamente ausente.

El 15 de mayo de 1953, Schilpp invitó a G a colaborar en un libro sobre Carnap con un ensayo que había de titularse «Carnap y la ontología de las matemáticas». G respondió el 2 de julio aceptando escribir un breve ensayo sobre «Algunas observaciones sobre la concepción nominalista de la naturaleza de las matemáticas». Los manuscritos habían de estar listos el 2 de abril de 1954. Pero G hizo seis versiones de su ensayo (muy primorosamente conservadas en el Nachlass) —rebautizado «¿Es la matemática sintaxis del lenguaje?»— para acabar por comunicarle a Schilpp el 2 de febrero de 1959 que al final no iba a entregarlo. Las razones que alegó para la retirada fueron 1) que no estaba satisfecho con el resultado; 2) que su manuscrito era muy crítico con la postura de Carnap; y 3) que puesto que era demasiado tarde para que Carnap pudiera responder, consideraba desleal publicarlo. Ni las súplicas, ni los halagos ni las amonestaciones de Schilpp sirvieron en esta ocasión para nada.

En *LM* se menciona el trabajo realizado para este ensayo el 19 de marzo y el 31 de julio (diciendo que quería acabar el ensayo antes de partir para las vacaciones veraniegas), así como el 14 de febrero y el 14 de marzo de 1955. (G habla de una continua sensación de irrealidad en el otoño.)

En realidad el libro sobre Carnap no se publicó hasta 1963. La respuesta —sin fecha— a sus críticos puede que fuera terminada mucho antes, pero parece probable que si G hubiera entregado su ensayo a comienzos de 1959, Carnap le hubiera respondido. Sin embargo, también es sumamente probable que Carnap honestamente no hubiera comprendido los puntos principales de G.

Según manifestaciones del propio G hechas en 1972 y 1976, el haber aceptado escribir un ensayo sobre Carnap mostrando que la matemática no es sintaxis le produjo muchas molestias; de 1953 en adelante pasó por unas cuantas versiones, pero acabó por no publicar el ensayo. Es probable que G hallara en la obra de Carnap un tipo y nivel de precisión muy diferentes de los suyos y que tuviera dificultades en diseñar un lenguaje común satisfactorio para hacer convincentes para su oponente sus propios argumentos.

Schilpp —dicho sea de pasada— también invitó a G (en 1964 y 1971) a participar en un libro sobre Karl Popper, pero G declinó la invitación (así como la petición del propio Popper). De ahí que las cuatro invitaciones (Russell, Einstein, Carnap y Popper) corrieran cada una de ellas una suerte distinta. Sólo en el caso de Einstein se publicaron tanto el ensayo de G como la respuesta.

1955

G debió gastar una gran cantidad de energía trabajando en el ensayo sobre Carnap.

G fue elegido miembro de la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos.

Einstein falleció el 18 de abril (a los 76 años). G y Bruria Kaufman, el último colaborador de Einstein (con quien escribió su último ensayo en enero de 1955), pusieron en orden los papeles científicos del despacho de Einstein, el 115 de Fuld Hall.

El 7 de septiembre y el 18 de noviembre G escribió dos respuestas a Carl Seeling sobre sus relaciones con Einstein. G vio a Einstein por primera vez en 1933 y se hicieron amigos íntimos en 1942.

G creía que la razón por la que Einstein disfrutaba con su compañía pudiera estar en que él mantenía tesis opuestas a las de Einstein sobre muchas cuestiones y no hacia un secreto de sus diferentes puntos de vista. Sus conversaciones generalmente versaban acerca de filosofía, física y política. (Para una relación más amplia, véase la sección 1.5.)

G planeó visitar a su madre en el verano. El 25 de junio le escribió diciéndole que su médico le había aconsejado que no fuera en el verano.

1956

En febrero Adele fue a Viena y en marzo trajo con ella a Princeton a su madre.

En agosto Kreisel y yo estuvimos tomando el té con los G en su casa (Linden Lane). Cuando se mencionó el suicidio de Turing, G preguntó si estaba casado. Cuando se le dio una respuesta negativa, dijo: «Puede que haya querido casarse pero no haya podido.»

Se cursaron invitaciones para participar en el Festschrift de Bernays a unas cuantas personas, entre las que estaba incluido G, siendo este el origen de su posterior ensayo de 1958.

1957

V. Neumann falleció el 8 de febrero (a los 53 años).

G fue elegido miembro de la Academia Americana de Artes y Ciencias.

En el capaz Instituto de Verano de Ithaca, C. Spector fue probablemente el único que aguantó toda la sesión con suma atención. Había publicado su importante tesis y andaba buscando un tema de investigación excitante. Sus contactos con Kreisel ese verano fueron en parte un instrumento para su posterior decisión de ampliar el trabajo de G sobre funcionales recursivos primitivos a una prueba de consistencia del análisis añadiendo un nuevo principio de definición, llamado «bar recurison». Trabajó en el proyecto desde el verano de 1959 hasta su inesperada muerte el 29 de julio de 1961, a la edad de 30 años. Durante 1960-61 estuvo en el I.A.S. y discutió su trabajo con Bernays y con G. (En la primavera de 1961 Bernays

estuvo en Philadelphia.) El trabajo se publicó en un volumen dedicado a su memoria, *Recursive Function Theory*, 1962 (Actas de un Symposium celebrado en abril de 1961). G escribió un postscriptum a este ensayo y cambió su título de «Funcionales demostrablemente recursivos del análisis: una prueba de consistencia mediante extensión de los principios intuicionistas» a «Funcionales demostrablemente recursivos del análisis: una prueba de consistencia mediante extensión de los principios formulados en la matemática intuicionista actual» (véase la sección 11.1).

El 9 de agosto G manifestó hallarse ocupado con un artículo (probablemente el del homenaje a Bernays) así como con la reimpresión de dos de sus trabajos anteriores en un libro.

1958

La madre y el hermano de G visitaron a G y a su mujer en mayo. Esta era la primera vez en que G los veía desde 1940.

G publicó un ensayo filosófico que contiene su método en el que se emplean funcionales recursivos primitivos (de 1941), con ocasión del 70 cumpleaños de Bernays. Este estuvo de visita un mes o dos en el I.A.S. a comienzos de año. (El 11 de agosto G escribía que había enviado su ensayo hacía tres semanas.)

Este ensayo ocupa un lugar central en el programa (ampliación del de Hilbert) tendente a justificar el razonamiento clásico por medios constructivos. Aunque los teoremas de incompletud de G han mostrado la imposibilidad del programa hilbertiano tal como originariamente fue concebido, sigue pendiente el indefinido problema de ampliar el método finitista de Hilbert con vistas a incluir ámbitos más amplios del razonamiento constructivo, del que la concepción intuicionista constituye obviamente el ejemplo más notable. Mientras que con el programa hilbertiano original, de haber tenido éxito, no habría habido problema alguno de evidencia del razonamiento elegido, el programa ampliado se enfrenta con una doble tarea: ver que el razonamiento constructivo elegido es evidente y basar el razonamiento clásico en él. Por la experiencia acumulada desde 1930, se ve que la relación entre constructividad y evidencia es enormemente compleja. En mi opinión, esta experiencia ilustra el tipo de bases con que hay que contrarrestar las apelaciones absolutistas a la intuición (y a la introspección), asociadas el programa de Husserl.

La traducción hecha por G en 1932 (el 28 de junio, mencionada antes) de la aritmética clásica a la intuicionista demostraba que ésta no era más evidente que la primera. La traducción revela que el desenvolvimiento de derivaciones llevadas a cabo conforme a reglas formales intuicionistas encierra el mismo grado de complejidad que sus contrapartidas clásicas. El ensayo de G de 1958 trata de dar una interpretación más evidente de la aritmética intuicionista (y, en consecuencia, por su traducción de 1932, también de la clásica); este punto se halla sugerido en la nota 1 de la página 283 y ampliamente elaborado en su famosa versión inglesa de finales de 1960 (especialmente en la nueva nota, más larga, que en el manuscrito que ha circulado privadamente figura como k; véase la sección 11.1 para una amplia discusión de esta versión inglesa).

1959

En marzo falleció en Princeton la madre de Adele (carta de 3 de abril).

Adele fue en julio a pasar tres semanas y media a las Montañas Blancas y G pudo trabajar en su ausencia con gran concentración. El verano fue el más caluroso en 20 años, pero a G lejos de importarle, le vino bien (carta de 30 de julio).

Adele estuvo en Europa (la mayor parte del tiempo en Viena) unos dos meses de octubre a diciembre (cartas de 8 de noviembre y de 6 de diciembre).

G empezó a estudiar la obra de Husserl; sólo le interesaba la obra tardía (a partir de 1907). Según él, estaba acostumbrado a pensar que la filosofía sólo podía abordarse del mismo modo que, y (o) reflexionando sobre, la ciencia fundamental, pero que, en cierto momento, se convenció de que la filosofía requiere un método distinto, tal como el propuesto por Husserl. También consideraba (al menos en la década de 1970) que el conocimiento cotidiano constituye el más importante y básico de los datos de la filosofía. Este cambio en la forma de concebir el método filosófico y su estudio de Husserl probablemente se produjeron a través de un proceso «dialéctico». Es probable que no aceptara el énfasis husserliano en la subjetividad y que deseara servirse del método para llegar a un sistema metafísico que fuera comparable en alcance a la monadología leibniziana pero que estuviera más sólidamente basado en una intuición compartible y disciplinada.

[Casualmente, Husserl había nacido cien años antes (y lo mismo H. Bergson y John Dewey). Por lo demás, el año 1859 ha sido a veces considerado el climax del siglo diecinueve. Fue el año de *On the Origin of Species* de Darwin, *Critique of Political Economy* de Marx, *Essay on liberty* de J. S. Mill, *A Tale of two Cities* de Dickens, *Tristam und Isolde* de Wagner, *Idylls of the King* de Tennyson, *Adam Bede* de George Eliot, *The Virginians* de Thackeray, la muerte de Macaulay y Tocqueville, el centenario del nacimiento de F. Schiller, etc.]

1960

Bernays y K. Schütte estuvieron ambos en 1959-60 en el I.A.S, y tuve oportunidad de verlos en varias ocasiones, dado que ese año yo estaba en los Laboratorios Bell. G tenía frecuentes discusiones con Bernays (generalmente, cuando éste visitaba el Instituto).

La madre y el hermano de G estuvieron en América durante un largo periodo, probablemente de marzo a mayo (cartas de 6 de marzo y 6 de julio).

Adele estuvo en Viena en noviembre (carta de 18 de noviembre). Antes de su regreso en diciembre, G se había alimentado fundamentalmente sólo de huevos (carta de 16 de diciembre).

1961

Según manifiesta el propio G en 1976, su salud fue excepcionalmente mala este año. No sé cuáles fueron los problemas que tuvo.

G fue elegido miembro de la Sociedad Filosófica Americana.

G respondió el 7 de noviembre a una indagación de A. W. Burks (de 8 de agosto) en relación con algunas referencias hechas por v. Neumann al teorema de G (cita de las pp. 55-56 de *Theory of Self-Reproducing Automata,* 1966). Entre otras cosas, G decía en su carta «Creo que ese teorema mío al que v. Neumann se refiere estriba en... el hecho de que una descripción epistemológica completa de un lenguaje A no se puede dar en el mismo lenguaje A porque el concepto de verdad de una sentencia de A no se puede definir en A. Es en este teorema en el que estriba la verdadera razón a favor de la existencia de proposiciones indecidibles en los sistemas formales que contienen a la aritmética».

Bernays estuvo en la primavera en Philadelphia.

G había empezado a acostarse y a levantarse más temprano, y este sistema le sentaba mejor que el anterior (carta de 18 de marzo).

En su carta de 30 de abril G hace una amplia consideración de *Hamlet* y del *Fausto* de Goethe.

Adele estuvo en Italia entre julio y septiembre (cartas de 25 de junio y 23 de julio).

G escribió a su madre las cuatro cartas «teológicas» (23 de julio, 14 de agosto, 12 de septiembre y 6 de octubre), consideradas en la sección 8.1.

En respuesta a una pregunta de su madre, manifestaba el 12 de septiembre que le gustaría tener buenos libros de filosofía, incluidos los clásicos, como por ejemplo la *Crítica del juicio* de Kant o la *Crítica de la razón pura,* con objeto de poder leerlos de cuando en cuando.

1962

G publicó el postscriptum al ensayo de Spector (mencionado antes, epígrafe 1957); éste se relaciona con uno de los intereses de G que mejor resistieron el paso de los años, a saber, la constructividad y su papel en la matemática.

Otro de sus intereses permanentes (al menos a partir de la década de 1930) fue naturalmente la teoría de conjuntos. De la obra realizada en esta área a partir de 1950, lo que más le interesó fue el estudio de grandes cardinales (compactos, medibles, de Ramsey, etc.), los principios de reflexión y probablemente también la teoría de conjuntos de Ackermann. [Se ha dicho (Kreisel, p. 159) que en los años cincuenta buscó, sin éxito (para invitarlos al I.A.S.) lógicos que estuvieran interesados en las propiedades de la partición.]

En cuanto a sus intereses filosóficos, parece que durante muchos años se reservó sus ideas para sí debido tanto a que no había logrado formularlas de un modo que le resultara satisfactorio como a que no había encontrado una audiencia suficientemente favorable. No es improbable que discutiera muchas de estas ideas con Bernays, que compartía con él una buena dosis de intereses y conocimientos (tanto de la literatura técnica como de la filosófica, incluidos Kant y Husserl).

G escribía a Marianne (el 17 de marzo) «Tienes toda la razón en que la humanidad no ha mejorado con el viaje a la luna. Esto tiene que ver con el viejo conflicto entre ciencias "naturales" y "del espíritu". No habría ningún riesgo de guerra atómica si los progresos en la historia, la ciencia que trata del derecho y del estado, la filosofía, la psicología, la literatura, el arte, etc. fueran comparables a los de la física. Pero en lugar de semejante progreso, uno se ve sorprendido por regresos significativos en las ciencias del espíritu». [Me parece ésta una afirmación que informa de las ideas de G acerca de la naturaleza y el estado del campo de los estudios humanos.]

El 4 y el 19 de julio G hacía observaciones sobre su «reciente descubrimiento» del «poeta moderno» Franz Kafka.

«Adele, por primera vez en mucho tiempo, ha pasado todo el verano aquí» (carta de 27 de agosto).

Marianne y Rudolf (el hermano de G) estuvieron en Princeton de finales de septiembre a mediados de octubre.

1963

En la primavera empezó a circular el borrador de Paul J. Cohen de su prueba de independencia de la hipótesis del continuo. G compartió con Cohen la tarea de corregir errores y pulir el ensayo. A finales de año, G presentó (el 30 de septiembre y el 27 de noviembre) el artículo de Cohen (en dos partes) ante la PNAS (1963, pp. 1143-1148; 1964, pp. 105-11).

Probablemente antes de la primavera, G había acabado una revisión de su ensayo de 1947 sobre el problema del continuo de Cantor, con un suplemento fundamentalmente filosófico. A finales de año, se añadió un postscriptum aludiendo al resultado de Cohen de la independencia. (El texto completo fue publicado al año siguiente en el volumen editado por P. Benacerraf y H. Putnam. Parece que en un principio G fue reacio a que se incluyeran en este volumen sus ensayos debido a que creía que los editores no simpatizaban con sus tesis filosóficas. En especial, temía que los editores hicieran comentarios negativos injustos en la introducción. Sólo consintió en que se publicaran sus trabajos cuando tuvo la seguridad de que no tenían intención de juzgar los ensayos en la introducción.)

La combinación de la revisión y la interacción con Cohen debió de haber servido de estímulo a G para retomar de nuevo el proble-

ma del continuo, llevándole a revisar su obra anterior sobre la cuestión de la independencia y a intentar una resolución de la CH. Puso sumo cuidado, mostrando con ello su generosidad, en no privar en modo alguno a Cohen de la fama por su importante trabajo. En la primavera de 1965, de visita en Harvard, Cohen me contó que le había preguntado a G por su propia prueba de independencia del axioma de elección y que G le había respondido, «¿Qué prueba?». [Desde finales de los cuarenta estoy oyendo referencias en conversaciones a la prueba sin publicar de G.] El 30 de junio de 1967, G escribió una carta a Wolfgang Rautenberg (publicada en la p. 20 de *Mathematik in der Schule,* vol. 6, 1968) para desmentir en parte una afirmación hecha por Mostowski sobre esta cuestion. La afirmación ofrece una consideración de cómo veía en 1967 sus resultados de 1942: «Die Mostowskische Behauptung ist insofern unrichtig, als ich bloss im Besitze gewisser Teilresultate war, nämlich von Beweisen für die Unabhängigkeit der Konstrucktibilitäts —und Auswahlsaxiome in der Typentheorie. Auf Grunde meiner höchst unvollständign Aufzeichnungen von damals (d.h. 1942) könnte ich ohne Schwierigkeiten nur den ersten dieser beiden Beweise rekonstruieren. Meine Methode hat eine sehr nahe Verwandtschaft mit der neurdings von [R. Solovay und] Dana Scott entwickelten, weniger mit den Cohenschen.» Por otro lado, G escribió una carta el 1 de mayo de 1968 para corregir una descripción que Cohen hizo de su propio trabajo como una «corrección» del de G (véase Kreisel, p. 201).

La tentativa de G de solucionar la CH inventando nuevos axiomas fue comunicada a otros en 1970 y abandonada después (véase más adelante).

G añadió una nota (fechada el 28 de agosto) a su famoso ensayo de 1931 para decir que, gracias a la obra de Turing, es posible una versión completamente general de sus dos resultados de incompletud (publicada en la p. 616 de *FG,* 1967).

En su carta de 14 de mayo G aludía a sus actividades profesionales para explicar por qué no había escrito (a Marianne) desde el 24 de marzo. En el Instituto, explicaba, era un año de mucho trabajo, pues, por ejemplo, había que evaluar a los candidatos para decidir las remuneraciones. «Este año los aspirantes dentro de mi campo se han más que duplicado.» Además, «Alguien ha resuelto un problema muy importante en mi campo hace 14 días». Como a G se le había pedido que presentara el trabajo ante la Academia Nacio-

nal, no le quedaba más remedio que «responder de su corrección». Y como el problema es difícil, ello requiere mucho tiempo. [Este pasaje se refiere naturalmente a la prueba de Cohen.]

G comentaba también el rápido desarrollo de la matemática durante los últimos años como consecuencia de la competencia con Rusia y del incremento de los fondos federales. «El número de Ph. D. se ha triplicado en unos años.» Además, había más desacuerdos en el Instituto, de suerte que las cosas podían depender de un [su] solo voto. Pero formarse una opinión bien informada llevaba su tiempo.

El 7 de agosto G escribía, «Hoy he recibido la agradable noticia de que la traducción (al inglés) de un artículo mío, cuya revisión también me está llevando mucho tiempo, se retrasará. Una vez más estoy dedicando todo mi tiempo a escribirte». (La traducción es evidentemente la del ensayo de G de 1931, que luego se publicó en *FG.)* «He perdido prácticamente el contacto con la política, ya que sólo leo los periódicos muy de cuando en cuando.»

En agosto Adele pasó en la costa cuatro semanas. En septiembre, Adele y G pasaron tres días en un lugar frecuentado para celebrar «las bodas de plata» (de su matrimonio).

El 20 de octubre G declaraba que tenía que leer el artículo sobre las implicaciones de su obra (enviado al parecer por Marianne): «Que antes o después mi prueba sería útil a la religión era algo que cabía esperar, dado que, en cierto sentido, también tiene, indudablemente, justificación.»

1964

G escribió un postscriptum (fechado el 3 de junio) y añadió algunas notas a sus conferencias de 1934, para comentar algunos de los trabajos relevantes realizados desde entonces. Estas se incluyeron en la publicación de las conferencias en M. Davis, *The Undecidable* (1965, pp. 39-74, especialmente pp. 71-73). Más tarde (antes de 1970) G preparó otra nota para añadir al postscriptum, que se publicó en *MP* (pp. 325-326), en una forma posteriormente revisada por él en 1972.

Marianne y el hermano de G les visitaron en mayo. Marianne sufrió un accidente (Unfall) o un ataque (Anfall) a comienzos de julio.

Adele pasó cuatro semanas en la costa entre julio y agosto.

1965

G no sólo se concentró en el estudio de lo que él consideraba fundamental y, en consecuencia, merecedor de una atención continua, sino que también tuvo siempre una gran preocupación por la precisión y la completud, especialmente cuando escribía para publicar. Los diversos (cuatro, de hecho) añadidos que escribió en esta época para reediciones y publicaciones de sus primeros ensayos y conferencias (cinco en 1964, dos en 1965 y dos en 1967, figurando el ensayo de 1931 en dos versiones inglesas) ilustran todos ellos su preocupación por hacer más completa (una selección de) su primer trabajo. Las dos cartas que me dirigió y la revisión de su ensayo de 1958 (véase más adelante), que también vuelve sobre su primer trabajo, revelan lo mismo que sus (otros) ensayos filosóficos, su gran interés en relacionar (su) trabajo técnico con (sus) ideas filosóficas.

En cuanto a nuevas investigaciones, lo más probable es que en la década de 1960 se dedicara de un lado al estudio de la filosofía y de otro al problema del continuo.

Marianne sufrió en marzo otro ataque.

G elogió la nueva biblioteca del instituto así como su nuevo despacho anexo a ella (en sus cartas de 14 de febrero y 18 de marzo). «Ahora es la parte más bonita y moderna del Instituto.»

Adele disfrutó de unas largas vacaciones veraniegas y de una «cura» en Europa.

1966

G escribió una nota (fechada el 18 de marzo) para la traducción inglesa de la reformulación de 1931 de sus resultados de incompletud en términos de teoría de números (en vez de en términos de teoría de conjuntos), en la que subraya las afirmaciones más generales y las pruebas más elegantes de sus teoremas (impresa en las pp. 616-617 de *FG*, 1967).

G cumplió este año sesenta años. La Academia de Ciencias de Ohio organizó, para celebrar el acontecimiento, un no muy bien preparado simposio que tuvo lugar entre los días 21-23 de abril en Columbus, Ohio, y al que G envió las siguientes «salutaciones»: «Quiero enviar mis salutaciones al simposio y, en particular, a los

ponentes. Siento no poder asistir pero espero con interés y agrado el volumen en que se imprimirán las ponencias.» Este apareció en 1969 e incluye también saludos de J. R. Oppenheimer (director del I.A.S. durante muchos años) y una reproducción del elogio que v. Neumann había hecho de G (en marzo de 1951).

Viena, el segundo de los tres «hogares» de G, hizo muchos infructuosos intentos para homenajear a G en su sexagésimo cumpleaños. El había despreciado el puesto de profesor honorario de matemáticas propuesto por la Universidad de Viena el 23 de febrero. Declinó también el puesto de miembro honorario de la Academia de Ciencias Austríaca en una carta fechada el 6 de agosto, echando mano de un argumento un tanto tortuoso. Al parecer no había sido posible ofrecerle un doctorado honorario de filosofía antes de la división de la facultad de filosofía en dos (en los años setenta). Por fin, la Universidad de Viena pudo concederle a G el título de doctor *honoris causa* en ciencias naturales póstumamente (con el consentimiento de la Sra. G). (Para más detalles véase Christian, *op. cit.* en el epígrafe 1932, cap. 3, pp. 266-267.) A G le fue ofrecida además la medalla austríaca de arte y ciencia y enviada una carta personal desde el Bürgermeister.

El 23 de julio falleció en Viena Marianne (Handschuh), la madre de G, que había nacido el 31 de agosto de 1879. Tenía muchas ganas de estar con G el día de su cumpleaños y sintió mucho no poder hacer el viaje. Le telefoneó ese día (28 de abril). La última carta de G a su madre (en *LM*) es del 4 de julio.

En su carta de 24 de febrero G contaba que Carl Kaysen había sido elegido nuevo director: «Tal vez ya hayas oído decir que acaba de ser nombrado en el Instituto el sucesor de Oppenheimer.»

G respondió a las preguntas de Constance Reid (22 de marzo) sobre la relación entre su obra y el programa de Hilbert.

1967

El Instituto de Verano sobre Teoría de conjuntos se celebró en U.C.L.A. y G fue invitado a participar. En una respuesta a P. Cohen fechada el 27 de abril, G declinaba la invitación y manifestaba que llevaba bastantes años interesado fundamentalmente en problemas filosóficos y epistemológicos básicos y en nuevas aplicaciones de esos estudios a la ciencia. Pero que todavía no había llegado a

ser capaz de realizar tales aplicaciones. Tengo un vago recuerdo de que G envió un mensaje haciendo elogios de los recientes avances realizados en el estudio de los cardinales grandes y en los problemas de independencia.

G fue distinguido con el título de Sc. D. por el Amherst College y elegido miembro honorario de la Sociedad Matemática Londinense.

El 27 de julio le envié a G el borrador de la primera sección de mi ensayo sobre el trabajo realizado en lógica por Skolem, pidiéndole su comentario. El 14 de septiembre le envié un borrador del trabajo entero, repitiéndole mi deseo de que me enviara su comentario. (Una versión revisada de este trabajo fue publicada en *Selected Logical Works of Th. Skolem,* 1970, pp. 17-52). [El 28 de septiembre también escribí a G pidiéndole una carta sobre Solovay, carta que recuerdo que me envió sin tardanza.] Su respuesta, de 7 de diciembre, empezaba señalando el gran cuidado que tenía que tomarse en la preparación de la respuesta: «Le agradezco mucho que me haya enviado su manuscrito sobre la obra de Skolem. Lamento la tardanza de mi respuesta. Me parece que, en algunos puntos, su representación de las cosas no es la correcta, por lo que quisiera considerar minuciosamente lo que he de decir.» [En el Nachlass hay nueve páginas de material manuscrito para la carta.]

El 19 de diciembre le envié a G una carta que incluía ciertas revisiones de mi ensayo sobre Skolem (que tomaban en consideración los comentarios de G) así como cuestiones filosóficas generales agrupadas bajo seis encabezamientos (postura finitaria, pruebas de consistencia no finitarias, concepción objetivista y trabajo realizado por G en lógica, concepto iterativo de conjunto, paradojas de la teoría de conjuntos, e implicaciones filosóficas de los resultados de incompletud). [Esta carta y su sobre se conservan en el Nachlass de G con notas al margen hechas por él. En el sobre, G puso «Wiss. interessante».] En el ínterin mantuve también correspondencia con Bernays a quien le hablé tanto de mi manuscrito sobre Skolem como de los comentarios de G.

La segunda carta es del 7 de marzo de 1968; en ella complementaba su carta anterior y respondía de pasada a algunas de las cuestiones planteadas por Bernays y por mí. Estas dos cartas de G están publicadas ambas, con alguna omisión insignificante, en mi *MP* (1974, pp. 8-11).

1968

G fue elegido miembro extranjero de la Sociedad Real de Londres.

G terminaba la carta que me dirigió el 7 de marzo con lo siguiente: «Desgraciadamente he estado muy ocupado las pasadas semanas reescribiendo uno de mis primeros ensayos. Pero espero poder responder pronto a las otras preguntas planteadas en su carta de 19 de diciembre.» Le escribí de nuevo el 23 de abril diciéndole que esperaba sus respuestas.

Creo que el ensayo que estaba reescribiendo en esta época era su ensayo de 1958. En 1976 me dijo que el trabajo (reescrito) ya estaba en pruebas antes de que cayera enfermo [presumiblemente a comienzos de 1970]. Recientemente he encontrado un borrador de una carta mía a Bernays, no enviada, con fecha de 29 de octubre de 1976, que trata de la solicitud de G a propósito de este trabajo suyo. El borrador daba cuenta de las ganas que G tenía entonces de ver publicado el ensayo en forma de pruebas, con dos correcciones menores:

1) Bajo la nota añadida c) introducir la sentencia, «Gödel me ha notificado que el axioma de definición disyuntiva es derivable de los otros axiomas del sistema T».

2) En «Algunas observaciones sobre el resultado de decidibilidad», sustituir el segundo parágrafo de la sección 1 por «El teorema sigue siendo válido para sistemas mucho más débiles que Z. Con cambios insignificantes de terminología, vale para toda traducción recursiva de las ecuaciones recursivas primitivas a S».

Tal como ahora lo recuerdo, cambió de parecer acerca de las «correcciones» y además no me envió una de las dos copias de las galeradas. En algún momento llegó a decirme incluso que las correcciones citadas antes eran innecesarias y que sólo pretendía cambiar dos o tres palabras que ahora ya no recuerdo.

Acerca de la versión reescrita mencionaba varias veces la nota añadida (al parecer la k, que era una elaboración de la vieja nota 5), la cual explica «por qué la prueba no es circular sino que está empleando algo más evidente para interpretar la teoría intuicionista de números». [Tengo en mi archivo una invitación de Bernays y A. Engeler, con fecha de octubre de 1966, para participar en un sim-

posio de *Dialéctica* sobre los fundamentos de la matemática. Los trabajos debían estar listos para el 30 de septiembre de 1967. Es probable que G, que había estado trabajando en la versión inglesa de su ensayo de 1958 durante varios años, se decidiera a reescribirlo para responder a una invitación al mismo «simposio escrito».]

1969

Es un hecho muy conocido que, a finales de los años sesenta, G se negó a someterse a la operación requerida por el estado de su próstata, a pesar de los consejos de colegas implicados en el asunto. Más en general, se ha difundido la noticia de que la salud de G fue mala desde finales de esta década en adelante. De los factores que tuvieron un efecto negativo en el espíritu y en la obra de G entre los años 1969 a 1978, un resumen decía, «Los acontecimientos que han tenido lugar durante este periodo han perturbado enormemente a Gödel. Su esposa sufrió dos ataques de apoplejía y una operación importante. Se produjeron cambios —obviamente relacionados entre sí— hacia peor tanto en América como en el I.A.S., el país y la institución a los que se sentía tan vinculado... Pero el factor decisivo fue su propia enfermedad» (Kreisel, p. 159).

En 1984 se publicó en una revista soviética una carta fechada el 10 de diciembre de 1969 dirigida por G al profesor George A. Brutian (de la Comisión Internacional de Investigación e Intercambios de la ciudad de Nueva York).

He aquí una formulación de la significación filosófica de mi resultado, que ofrecí en cierta ocasión respondiendo a una pregunta:

Los pocos axiomas inmediatamente evidentes de los que se puede derivar toda la matemática contemporánea no bastan para responder a todas las preguntas, si o no diofánticas de cierta clase simple bien definida. (Véase M. Davis, *The Undecidable,* Nueva York, 1965, p. 73, penúltimo parágrafo.) Más bien, para poder responder a todas esas cuestiones se requiere un número infinito de nuevos axiomas, cuya verdad sólo puede ser aprehendida (si es que puede serlo) por apelaciones constantemente renovadas a una intuición matemática que se actualiza en el curso del desarrollo de la matemática. Una intuición así se presenta, por ejemplo, en los axiomas de infinitud de la teoría de conjuntos.

Hay además otras formulaciones que es preciso añadir con objeto de esclarecer completamente la situación. Tal vez pueda enviárselas en fecha

posterior a través de la Comisión Internacional de Investigación e Intercambios.

Según Köhler, «Morgenstern contaba que, después de finales de la década de 1960, Gödel confesaba que ya no era capaz de entender el trabajo de los lógicos más jóvenes».

1970

Según Köhler, «O. Morgenstern llevó a Gödel de su casa al hospital en 1970». Parece que fue a ver al Dr. W. J. Tate en febrero y al Dr. Harvey Rothberg después. Fue hospitalizado en 1974 a causa de su problema de próstata, pero se negó a operarse, en contra de los consejos de los urólogos James Varney y Charles Place.

Según testimonio de G en 1976, su salud fue muy mala este año. La primera parte del año fue al parecer un periodo en el que creyó que iba a morir y trató de concluir algunos aspectos de su trabajo. Así por ejemplo, yo recibí una carta fechada el 3 de abril, escrita por Dana Scott por indicación de G, en la que se informaba que G estaba enfermo y deseaba poner en orden algunos trabajos antes de que fuera demasiado tarde, y en la que se decía que la inútil idea de extender el caso de Gödel hasta incluir la identidad era lo que G recordaba de su enfoque original. En una carta a Bernays, fechada el 16 de junio, Scott informaba de que la salud de G era mucho mejor.

El 9 de enero escribí una carta a G para decirle que estaría en Princeton el 20, 27 y 29 de enero y para preguntarle si podría verme en alguna de esas fechas. G escribió una respuesta afirmativa pero no me la envió; él le pidió a Carl [Peter] Hempel que me localizara el 29, pero sólo pudimos hablar brevemente por teléfono. El 9 de julio de 1971, G me escribió diciéndome, «Siento que, debido a mi enfermedad, nuestra proyectada reunión de enero de 1970, no se materializara. Me gustaría verle este año en alguna ocasión en que le venga bien».

Atípicamente, a comienzos de este año le envió a A. Tarski un manuscritos sin pulir (parece que con objeto de publicarlo) titulado, «Algunas conclusiones que llevan a la probable conclusión de que la verdadera potencia del continuo es aleph-dos». G reseñaba cuatro nuevos axiomas y mantenía la tesis de que de ellos se deriva-

ba la proposición incluida en el título. La demostración propuesta resultó ser defectuosa y el ensayo fue retirado el 19 de mayo. Según un informe, G achacó su descuido a los medicamentos que estaba tomando en esa época por prescripción facultativa. De hecho, más tarde fue capaz de derivar la hipótesis del continuo de sus nuevos axiomas, de los que el 4 es el más fuerte. (De la demostración dio cuenta Erik Ellentuck en «Gödel's square axioms for the continuum», *Mathematische Annalen,* vol. 216, 1975, pp. 29-33.)

1971

El 25 de mayo escribí a G pidiéndole permiso para citar su carta del 7 de diciembre de 1967 en el libro que estaba escribiendo (con el título de *Knowledge and Logic* en aquella época, más tarde publicado con el de *MP).* G primero le pidió a Stanley Tennenbaum que me informara de su respuesta positiva y luego me escribió el 9 de julio para pedirme que también se publicara la de 7 de marzo de 1968 y para darme detalladas instrucciones de las partes que debían incluirse. Las instrucciones se siguieron en lo esencial en lo que a la publicación de las cartas se refiere. También manifestó, «En realidad estoy completamente a favor de que esas cosas sean de conocimiento general».

En la misma carta G expresaba sus deseos de reunirse conmigo. Le escribí de nuevo el 20 de julio para proponerle que comenzáramos nuestras reuniones en el otoño, ya que en el verano yo estaría la mayor parte del tiempo en la zona de Boston. También le envié una copia de una amplia parte de mi libro manuscrito. El me respondió el 4 de agosto diciéndome acerca del manuscrito, «Como no tendré tiempo de leerlo en un futuro próximo, le rogaría que, en caso de que quiera algún comentario mío, me mencionara los pasajes en que aparece mi nombre». El 11 de agosto le envié una selección de los tres apartados del manuscrito que estaban especialmente relacionados con su trabajo. Tras mi regreso a Nueva York, se trazó un programa según el cual yo iría a su despacho un miércoles sí y otro no de 11:00 a 1:15. Durante un tiempo, Carl Kaysen, el director, puso a mi disposición un apartamento en Einstein Drive, pero enseguida lo dejé porque me pareció que hacía muy poco uso de él.

En 1973, las visitas tuvieron lugar los días 13 y 17 de octubre,

10 y 24 de noviembre, y 6 de diciembre. Durante las visitas, que se prolongaron hasta junio de 1972, él hacía comentarios sobre mi manuscrito y respondía a preguntas cuando se presentaban. Yo tomaba notas, pero no me pareció procedente llevar un magnetófono.

1972

G fue elegido miembro correspondiente de la British Academy y del *Institut de France* (Académie des Sciences Morales et Politiques). Sc. D por la Universidad Rockefeller (1 de junio).

Mis visitas a su despacho se repitieron los días 5 y 19 de enero, 2 y 23 de febrero, 15 de marzo, 5 y 19 de abril, 3 y 24 de mayo, 14 de junio, 9 de agosto, 13 de septiembre, 4 y 18 de octubre, 8 y 29 de noviembre, y 15 de diciembre. En el curso de la discusión de mis manuscritos, hacía observaciones, pidiéndome que las pusiera por escrito y se las enviara. Tales observaciones fueron revisadas unas cuantas veces e incluidas en mi libro, cuyo manuscrito fue enviado al editor en junio. (Entre las visitas de junio y agosto estuve fuera siete semanas), O. Morgenstern me dijo que G disfrutaba mucho con estas sesiones; un día de la primavera, él vino al despacho de G y tomó fotos de G conmigo.

En la convocatoria para la concesión de doctorados *honoris causa* del 1 de junio, yo presenté a G y el Dr. Zinder presentó a Alfred Day Hershey, la otra única persona que recibió esta distinción en ciencias de la Universidad Rockefeller ese año. Pocos días después, G hizo alusión a la sorpresa que le había producido el que no hubiera habido actos religiosos ni tampoco reportajes de prensa.

1973

Es probable que G continuara trabajando en la hipótesis del continuo. El título de uno de los manuscritos de esta época (conservado en el Nachlass) es «Una demostración de la hipótesis del continuo de Cantor a partir de un axioma sumamente plausible sobre órdenes de crecimiento».

No he encontrado (aún) el informe de mis charlas con G durante el periodo entre 1973 y 1974, aunque recuerdo que hablé con él

por teléfono. Sin embargo, algunas notas breves contenidas en el Nachlass parecen indicar que hablé con G en febrero, junio, septiembre y noviembre de 1973, posiblemente en su despacho. Probablemente fue en septiembre cuando se produjo en nuestra conversación un divertido equívoco a propósito del «conocimiento del carácter». Durante algún tiempo, yo estuve interesado en el conocimiento computacional de los caracteres (palabras) chinos, pero G creyó que lo que me interesaba era la tarea de conocer los caracteres de la gente (a partir de rasgos externos) y me dijo que a él también le interesaba el problema.

Mirando hacia atrás, creo que lo que redujo mis contactos con G durante 1973 y 1974 fue sobre todo mi preocupación, a partir de la primavera de 1973, por China y por el materialismo dialéctico. En el Nachlass se conservan tres postales que le envié: el 14 de julio de 1972 desde Beijing, el 28 de junio de 1973 desde Hawaii, y el 17 de diciembre de 1973 desde Beijing. Hay también una carta (de 23 de agosto) sobre las pruebas de *MP*.

1974

Mi libro *MP* junto con las diversas observaciones de G apareció en enero y a él le decepcionó tanto como a mí el que se dedicara tan poca atención al libro. Nos escribimos y hablamos por teléfono comentando las reseñas que tuvo. Además, en abril le escribí una carta hablándole de mi lectura de alguna de las obras de Freud y transmitiéndole el ruego de que leyera algunas páginas de mi maestro Shen Yuting. Una carta de 1 de julio mencionaba una larga conversación telefónica mantenida el día anterior, en la que encontré a G de buen humor. Hubo una discusión (el 4 de diciembre) sobre la concesión de permiso para una traducción italiana de *MP* (de Alberto Giacomelli, que finalmente ha aparecido en 1984, Editore Boringhieri).

1975

A G le fue concedida por el presidente Ford la Medalla Nacional de la Ciencia, pero no pudo asistir a la ceremonia, el 18 de septiembre, por encontrarse enfermo. (La distinción correspondía al

año 1974.) La universidad de Princeton le concedió el doctorado honorario en ciencias y planeó asistir a la ceremonia, pero no pudo hacerlo. Como consecuencia de ello, la distinción fue denegada.

G arregló las cosas para que yo pudiera visitar el I.A.S. en 1975-1976. Estuve allí (parte del tiempo) entre julio de 1975 y agosto de 1976. Durante este periodo raramente aparecía por el Instituto y yo sólo le fui a ver a su despacho en contadas ocasiones. Pero hablamos mucho y muy largamente por teléfono.

Mi principal ocupación durante la primera parte de este periodo fue revisar mi ensayo «Large sets» y escribir algunas de las ideas de G acerca de los conceptos y los conjuntos.

1976

El texto de «Algunos hechos acerca de Kurt Gödel», reproducido en la sección 2.1., fue escrito fundamentalmente en junio.

G se retiró del I.A.S. el 1 de julio.

La correspondencia, hasta con su hermano, cesó durante los dos últimos años de la vida de G. G estuvo hospitalizado a comienzos de abril. A partir de este momento, G alude con frecuencia a los problemas de salud suyos y de su mujer.

Hubo propuestas para tratar los problemas de salud de G con especial atención en el Hospital de la Universidad de Pennsylvania y yo discutí algunos detalles con él por teléfono. Pero todo se quedó en lo hablado, ya que G no accedió a dejarse llevar al hospital.

1977

Entre abril y junio tuvimos muchas discusiones por teléfono a propósito de la historia de su trabajo sobre los conjuntos constructibles.

En julio la Sra. G sufrió una operación importante y estuvo hospitalizada hasta pocos días antes de Navidad. Esto tuvo efectos muy negativos sobre G. Así por ejemplo, se lamentaba de que se le había dejado solo, pero cuando las enfermeras llegaban a la casa, no les abría la puerta.

Oskar Morgenstern (1902-1977) falleció el 26 de julio. G le telefoneó unos días más tarde y la Sra. Morgenstern le dio la mala no-

ticia. G no respondió nada, seguramente debido a que estaba demasiado afectado hasta para expresar su condolencia.

Paul Bernays (1888-1977) falleció en septiembre. Es probable que G no se enterara nunca de que Bernays había fallecido.

Del 17 de septiembre al 16 de noviembre estuve fuera. Llamé a G antes de mi partida y después de mi regreso.

Le fui a ver a su casa el 17 de diciembre, exactamente cuatro semanas antes de su muerte. Su mente seguía siendo lúcida y no parecía muy enfermo. Me dijo, «He perdido la capacidad de tomar decisiones positivas. Sólo puedo tomarlas negativas». Un día o dos después la Sra. G regresó a casa y persuadió a G para que ingresara en el hospital de Princeton (el 29 de diciembre, con ayuda de H. Whitney).

1978

Le telefoneé el 11 de enero. Estuvo amable, pero sonaba lejano.

Se dijo que el peso de G era de sesenta y cinco libras antes de su muerte y que, al final, su paranoia se conformó a un síndrome clásico: miedo a envenenamiento de la comida llevando a la autoprivación.

El informe dice que murió en la posición fetal. Era sábado, 14 de enero, a la una de la tarde. Según el certificado de defunción, en los archivos del palacio de justicia del Condado de Mercer (Trenton, New Jersey), G falleció por «malnutrición e inanición» causada por «perturbación mental».

H. Whitney me telefoneó a primeras horas de la mañana del 16 de enero, y por la tarde visité a la Sra. G que estaba hablando con un pastor.

Al funeral (privado), el 19 de enero, asistió poca gente; yo sólo conocía a la Sra. G, a la Sra. Morse y a la Sra. Morgenstern. G está enterrado junto a su esposa y a su madre política en el cementerio de Princeton.

El 3 de marzo se celebro en el I.A.S. una reunión conmemorativa, presidida por A. Weil y en la que los ponentes fuimos S. Kochen (en lugar de R. Solovay), H. Whitney y yo (véase *Mathematical Intelligencer,* vol. 1, 1978, pp. 182-184). Kochen comparó la obra de G con la de Einstein (en que transformó problemas existentes en

otros nuevos) y con Kafka (en que aunó un gran poder de imaginación con una precisión legalista). Kochen habló también de su examen oral de doctorado en el que se le pidió que reseñara las principales contribuciones de G, observando que la lista abarcaba todos los aspectos de la lógica matemática del momento. Whitney trató de hacer un análisis de la psicología de G e informó de sus actividades en el I.A.S. Durante muchos años G y Whitney habían constituido la comisión que seleccionaba los profesores visitantes de lógica.

G legó todo a su mujer, la cual más tarde entregó su Nachlass al I.A.S.

1979

El 24 de marzo, la Asociación de Lógica Simbólica organizó un congreso en San Diego, dedicado a la obra de G, en el que fuimos ponentes Jockuch, Feferman, Kreisel y yo.

Por pura coincidencia, apareció este año un largo libro que ha sido muy aclamado, el *Gödel, Escher, Bach* de D. R. Hofstadter, el cual ha puesto el nombre de G y un aspecto de su obra a disposición de un amplio público. En cierta ocasión oí que un editor mostró interés en publicar los ensayos de G a tenor de la popularidad del libro de Hofstadter, extrañándose del contraste existente entre los valores intelectuales y comerciales.

1983

En el Séptimo Congreso Internacional de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia, celebrado en Salzburgo, Austria, se le dedicaron dos sesiones a G.

1985

En julio de 1984 se concluyó la catalogación de los trabajos de G. Los trabajos se han donado a la Biblioteca Firestone de la Universidad de Princeton, en donde están a disposición de los estudiosos desde el 1 de abril de 1985. El I.A.S. se quedará, sin embargo,

con el copyright sobre todo el material del Nachlass (en *CG* se ofrecerá una relación del Nachlass).

1986

Este es el año en que G hubiera cumplido los 80 años.

Los *Collected Works of Kurt Gödel* están siendo preparados desde hace algún tiempo por la Asociación de Lógica Simbólica con un comité de seis editores. El primer volumen apareció a comienzos de este año.

El 28 y 29 de abril se celebró en la Universidad de Viena un congreso dedicado a G en el que impartí una conferencia sobre «Discusiones con Kurt Gödel». También se celebró una conferencia en Bulgaria y un simposio en Kirchberg (Austria).

1987

Fundación de una Sociedad Gödel en Austria. Publicación de (la primera edición de) este libro.

Parte II
PENSAMIENTOS

Para la mayoría de la gente, la vida y la obra de G son como un remoto y esotérico paraje que es atractivo pero difícil de conseguir. Lo único que está en la mente es el viaje. Los hechos acerca de él son más fáciles de digerir que sus pensamientos, de los cuales los más asequibles son aquellos que tienen que ver con las respuestas más directas a su experiencia concreta en lo que se refiere a su crianza, educación y vida cotidiana, al menos en la medida en que los datos, caso de que sean disponibles, son de tipo familiar. Sin embargo, el modo en que él ha adquirido sus ideas más claramente abstractas y puramente teóricas ha sido añadiendo conocimiento especializado y penetrantes reflexiones privadas. Es evidente que el modo efectivo de enfocar tales pensamientos no es el genético, sino más bien una exposición conceptual que considere las cuestiones esenciales dentro del contexto de intereses claramente universales. En este sentido, creo que hay dos formas de enfocar los pensamientos de G especialmente indicadas para estimular nuestro poder de imaginación.

En primer lugar, cabe relacionar, en buena medida a través de contrastes, algunos de los pensamientos fundamentales de G con la más conocida figura de Einstein. Por un accidente histórico o algo por el estilo, ha sucedido que G y Einstein han sido buenos amigos durante más de una década. Han tenido amplias discusiones sobre

física, filosofía y política. En todas estas áreas, y también en la de la religión, cada uno de ellos ha apreciado y admirado las ideas del otro, que son, sin embargo, básicamente distintas. En términos generales, las ideas de Einstein eran en general más «realistas», más comprometidas en asuntos de actualidad, menos optimistas respecto de la capacidad de la razón para captar lo eterno, y más adecuadas al «espíritu de la época». Sus diferentes posturas ante ciertas cuestiones fundamentales representan dos de las principales respuestas alternativas a nuestra experiencia del mundo en que vivimos./

En segundo lugar, los pensamientos de G contienen ideas nuevas acerca de cuestiones perennes de interés no sólo para los especialistas. Así por ejemplo, ¿Es la mente algo más que una máquina? ¿Cómo es de exhaustible y concluyente el conocimiento que tenemos en matemáticas? ¿Cuán reales son el tiempo y el cambio? ¿Es el darwinismo adecuado para ofrecer una interpretación de los orígenes de la vida y de la mente? ¿Cómo de precisa puede llegar a ser la física? ¿Hay «otro mundo»? No cabe sorprenderse de que las ideas de G no zanjen concluyentemente ninguna de tales cuestiones. Y, naturalmente, en la medida en que sus resultados son definitivos, las implicaciones obvias son más limitadas. Pero su obra concreta es sumamente relevante para algunas de las cuestiones y sus especulaciones arrojan dudas acerca de algunas de las creencias fundamentales que hoy se tienen por bien establecidas.

Los ejemplos que acabamos de reseñar constituyen problemas filosóficos que hasta ahora han eludido la solución científica. G cree que algunos de ellos son susceptibles de solución científica. En general, le interesan mucho las conexiones entre la ciencia y la filosofía (en varias direcciones distintas). Esto no deja de ser atractivo para la motivación del trabajo científico por, y su aplicación a, amplios problemas filosóficos. Hay, sin embargo, un conflicto entre este amplio interés y los más concretos resultados (tales como los teoremas matemáticos exactos de G). Los que trabajan en un área científica o filosófica especializada (en alguna de sus formas actuales) constituyen una comunidad o colectivo en el que la comprensión y propósito comunes sirven de lazo de unión. Pero esta sensación de comunidad y esta comprensión objetiva están prácticamente ausentes de la sociedad más amplia y, en especial, entre diferentes colectivos. Einstein y G son excepcionales en el hecho de que tanto su obra científica como sus ideas filosóficas son también, en mayor o menor medida, fascinantes para el público en general. Aunque

este hecho crea un rastro que lleva a sus pensamientos más intencionados, una discusión seria de los mismos requiere inevitablemente del lector una atención más reconcentrada de lo que es normal que se dé. Además, allí donde tienen cosas más instructivas que decir, lo que dicen generalmente no se dirige directamente a las preocupaciones comunes más familiares.

En el otoño de 1955 G, comentando la amplia aceptación del trabajo de Einstein decía, «La razón por la que Einstein estimula la capacidad de imaginación de tantos contemporáneos es que sus teorías son de interés no sólo para los especialistas. También se ocupan de problemas filosóficos que son importantes en la vida diaria y en la ciencia, como es el caso del problema del tiempo. En consecuencia, la gente se siente atraída a él por inclinación, sin penetrar en el núcleo espiritual de su trabajo» (Seeling, p. 356). Además hay que señalar que la repentina fama le sobrevino a Einstein en 1919, momento en el que el mundo estaba enfermo y cansado de guerra, y deseoso de ideales nuevos.

En el caso del propio G, su teorema más famoso define y prueba la inagotabilidad de la matemática y las limitaciones de los sistemas formales (o programas de computador). Está, por tanto, relacionado con la conocida cuestión de si la mente está o no por encima de la máquina. De ahí que la atención continuamente creciente a los computadores y a la inteligencia artificial conlleve un crecimiento del interés popular por la obra de G. Pero, como reconoce el propio G, este teorema no soluciona la cuestión de si la mente está o no por encima de la materia. Por otro lado, sus nuevas soluciones a las ecuaciones einsteinianas del campo van acompañadas por una especulación acerca del «viaje en el tiempo» y acerca de si el tiempo y el cambio no son acaso en cierto sentido subjetivos e ilusorios. Pero hay serias dudas sobre si sus soluciones son auténticos candidatos a una descripción realista del mundo físico. Por otro lado, el más articulado realismo matemático o conceptual de G y sus ideas sobre el método filosófico (con su énfasis en la introspección y en el omnímodo poder de la razón así como en el lugar auxiliar del lenguaje) no son igualmente asequibles fuera de la comunidad de filósofos profesionales.

Capítulo 5
OBSERVACIONES INTRODUCTORIAS

Disponemos de una gran cantidad de información acerca de la vida, la obra y (otros) pensamientos de Einstein. Sus ideas resultan también más familiares que las de G en el sentido de que lo que dice de la religión, la política la filosofía, el arte, etc., se aparta bastante menos que lo que dice G de la perspectiva contemporánea de (la mayor parte de) la comunidad intelectual. Yo, por ejemplo, aunque considero más sugestivas las ideas de G, me encuentro más a gusto con las de Einstein. De ahí que una comparación de alguna de sus creencias nos sirva tanto para localizar algunos rasgos distintivos de los pensamientos de G como para preparar la discusión de mis propios acuerdos y desacuerdos con G.

5.1. **Por vía de Einstein**

El amor de Einstein por la música clásica es bien conocido; en cambio G no sintió demasiado interés por ella. Por el contrario, la curiosidad de G por el arte abstracto moderno, presumiblemente, no fue compartida por Einstein. En los años cincuenta, Einstein, como la mayor parte de los intelectuales de la época, prefería Stevenson a Eisenhower, y sin embargo, G se puso completamente del lado de este último. Einstein escribió en 1949 un ensayo, «Why so-

cialism?» (el primer número de *Monthly Review,* reeditado en sus *Ideas and Opinions,* 1954, pp. 151-158); yo creo que G sin embargo, aunque simpatizaba con el proyecto general, era más escéptico acerca de las propuestas existentes sobre el modo de realizarlo.

G dice de su religión que es teísta y no panteísta, en la línea de Leibniz más que de Spinoza (véase *GQ*). Las ideas de Einstein sobre religión se hallan mucho mejor documentadas (véase, por ejemplo, su autobiografía en Schilpp, pp. 3-5, y el resumen y referencias en Clark, pp. 502-504, 516-517). Por ejemplo, a la edad de 12 años había alcanzado «una profunda religiosidad», como consecuencia de «la maquinaria educativa tradicional». Pero enseguida cambió de forma de pensar «a través de la lectura de libros científicos populares». Este cambio se vio seguido por una «actitud positivamente fanática hacia el pensamiento libre» y una «predisposición contra todo tipo de autoridad». Su frecuentemente citada afirmación de 1929 dice que creía, contrariamente a G, «en el Dios de Spinoza, y no en un Dios que se ocupa del destino y las acciones de los hombres».

¿Qué efectos tuvieron estas distintas ideas religiosas sobre su respectivo trabajo? G propuso una prueba de la existencia de Dios, argumentó en favor de otro mundo y sugirió la idea de tomar a Dios como uno de los conceptos primitivos de la metafísica. Pero no estoy seguro de que esos pensamientos formaran parte integrante de su principal obra o de que afectaran siquiera a su vida de una forma significativa. Más importante y central para su pensamiento fue la predominante (e incluso excluyente) relevancia por él conferida a la persona o alma individual, independientemente de si fue o no capaz de atribuir una probabilidad significativa a la posibilidad de otra vida. Así, por ejemplo, cuando contraponía la mente a la máquina, pensaba en la mente como la de una persona dotada de vida eterna. Según él, si uno se conoce a sí mismo, lo conoce todo. En particular, el modo más efectivo para él de comprender la sociedad es conocerse a uno mismo. El no creía que los problemas éticos fueran difíciles o requiriesen serias consideraciones teóricas. Para él, las cuestiones que tienen que ver con la sociedad son irrelevantes para la filosofía fundamental. Su concepción de lo que podría considerarse una religión racional requiere también, creo yo, una conexión directa de cada individuo con Dios o el todo o lo que es último.

Como antes he dicho, tanto Einstein como G fueron grandes

amantes de la paz y cosmopolitas en su actitud. Aún cuando Einstein se ocupó de cuando en cuando de los asuntos judíos, distó mucho de ser un fanático y, según dice Philipp Frank (en la p. 7 de su biografía), «el problema de la nacionalidad y de las relaciones de los judíos con el resto del mundo le parecía una cuestión de poca monta». Durante cuatro décadas habló de cuando en cuando en público a favor de la paz y en contra del nacionalismo. Ya en el otoño de 1914, al comienzo de la Primera Guerra Mundial, Einstein firmó un «Manifiesto a los Europeos» para lamentar la guerra (la totalidad del texto aparece citada en Clark, pp. 229-230). En 1932 escribió una carta abierta (fechada el 30 de julio) proponiendo y solicitando iniciativas para «librar a la humanidad de la amenaza de la guerra». Freud escribió una larga respuesta discursiva y la correspondencia se publicó al año siguiente (con el título *Why War?*). El 11 de abril de 1955, una semana antes de su muerte, Einstein firmó la «Declaración Russell-Einstein» en la que se pedía una conferencia para alertar contra los peligros de la guerra. Aparte de sus esfuerzos por la paz, de los años veinte en adelante, Einstein fue un defensor de toda buena causa que llegara a sus oídos.

No sé de que G prestara su nombre para declaraciones públicas ni de que se metiera en acciones públicas que no estuvieran estrictamente conectadas con su vida profesional. Es probable que Einstein considerara la mayoría de sus actividades públicas como una obligación derivada de su gran fama. G fue más precavido y más reacio a adquirir compromisos (públicos). Aun en el caso de que hubiese logrado la fama de Einstein, seguramente no habría participado mucho más de lo que lo hizo en asuntos públicos e interpersonales de otra índole. Así por ejemplo, en el ámbito de su trabajo profesional fue sumamente reacio a aceptar ayudas a la investigación o a emprender tareas en cooperación, mientras que Einstein tuvo muchos (más de treinta) colaboradores a lo largo de los años (para una amplia información, véase Pais, pp. 483-501).

En la primavera de 1902, Einstein le contó a Maurice Solovine, su primer alumno (privado), que estaba estudiando filosofía, que a él también le había gustado mucho la filosofía de joven, pero que le había dado la espalda porque en ella reinaba la vaguedad y la arbitrariedad (para más información sobre los comentarios de Einstein a propósito de la filosofía, véase cap. 3, epígrafe 1922). G probablemente estaba de acuerdo con Einstein en que en la filosofía contemporánea reinaban la vaguedad y la arbitrariedad, pero en vez de

abandonar su dedicación, había optado por hacer filosofía de una manera mejor (o de la correcta). La mayoría de la gente probablemente dirá que la de Einstein fue una opción más acertada. De hecho sería más exacto decir que ambos decidieron dedicarse a la filosofía por caminos distintos aunque coincidentes en parte. En correspondencia con el reconocimiento que G hace de la relevancia del objetivismo para su obra matemática (*MP*, pp. 8-11) tenemos la siguiente observación einsteiniana, «La ciencia sin epistemología es —en la medida en que es concebible— primitiva y confusa» (Schilpp, p. 684). Más compleja resulta, sin embargo, la postura de G hacia la aserción einsteiniana inmediatamente anterior: «La epistemología sin contacto con la ciencia se convierte en un esquema vacío.»

En primer lugar, G no habló apenas de epistemología, sino que se ocupó más de filosofía o de metafísica. Esto puede que sea en parte una cuestión de terminología, pero sólo en parte. Aunque reconoció que la ciencia es sugestiva para la reflexión filosófica, él parece pensar también que el pensamiento puro podría penetrar en la filosofía como una disciplina autónoma. En cualquier caso, G consideraba la filosofía (y la metafísica) como capaz de alcanzar el estatuto de una teoría separable (que encierra la verdad fundamental), aun cuando la familiaridad con alguna ciencia (rudimentaria) pueda ser un prerrequisito para ello. Por otro lado, G parece ver la epistemología como un aspecto secundario de la filosofía no digno de ser considerado más que como tal. En relación con las diferentes concepciones de la dinámica de Newton y Leibniz, G estaba a favor de un concepto de fuerza más rico (que el de Newton) perteneciente, lo mismo que el de Leibniz, a la disciplina fundamental de la metafísica. Según G, mientras que la filosofía analiza los conceptos fundamentales, la ciencia se limita a usarlos.

Es evidente que Einstein se consideró a sí mismo igual de capaz en física que en filosofía pero que consideró más provechoso centrarse fundamentalmente en la física. Por otro lado, creo que, conforme a su postura, la epistemología puede ser cultivada con más provecho y comunicada de un modo más efectivo dentro del contexto de la ciencia fundamental. Así por ejemplo, Einstein habló con aprobación de ciertos intentos de «tratar más sistemáticamente mis ocasionales proferencias de contenido epistemológico» (Schilpp, p. 683). En consecuencia, cabe considerar tales tratamientos (*ibíd*, pp. 357-408) como una formulación de la teoría eins-

teiniana del conocimiento y de su concepción de la ciencia. No obstante, dicha formulación envuelve frecuentes y esenciales referencias a los pensamientos einsteinianos en física; no toma la forma de una manifestación directa (tal como la hecha por Leibniz en su *Monadología*) de la postura filosófica de Einstein. En mi opinión, si alguien tratara de destilar de ella dicha manifestación, el resultado sería menos convincente y estaría abierto a una mayor cantidad de malinterpretaciones. También en las obras filosóficas publicadas por G hallamos esta íntima conexión entre sus aserciones filosóficas y los hechos científicos relevantes que esclarecen y hacen más concreto su sentido.

En otras palabras, tiendo a pensar que hay en la filosofía un problema de formulación y de comunicación especial que requiere un tipo de presentación distinto del de la ciencia. G me dijo que no había logrado todavía llegar a una formulación directa de su postura filosófica, sino que lo único que había logrado era avanzar lo suficiente como para ser capaz de aplicarla en algunos contextos específicos (tales como el comentario al manuscrito de mi *MP*). Muchas veces tengo mis dudas de que G no estuviera buscando un tipo de formulación inapropiado o incluso imposible en filosofía. Esto tiene que ver con mi escepticismo en relación con la búsqueda, por parte de G, de una teoría filosófica exacta comparable a la que Newton logró en física. No creo que nuestros pensamientos correctos o por lo menos razonables sobre los conceptos más básicos sean susceptibles de ser formulados sin residuo ni ambigüedades en un conjunto de «axiomas», o en términos de enunciados generales desligados de toda conexión explícita con los «hechos brutos» conocidos de la ciencia y de la vida diaria (que, a mi modo de ver, son las partes más estables y fidedignamente comunicables de nuestra experiencia). Si el proyecto de G fuera factible, entonces parece que sería una especie de ciencia más excitante incluso que el más fructífero trabajo en ciencia fundamental, si bien cabe suponer que también más difícil. Y si se cree que no es posible, entonces el atractivo característico de la filosofía, sea o no engañoso, habrá que buscarlo en otro lado. En el caso excepcional de G y de Einstein, muchos han dicho o es probable que digan, que, al final de su vida, ambos persiguieron (por caminos distintos) metas no realistas (y, por tanto, equivocadas). Pero habrá que esperar el juicio de la historia para saber si fue o no fue así.

Las distintas concepciones que G y Einstein tuvieron de la filo-

sofía tienen mucho que ver con su trabajo y preferencias científicas. Einstein consideró una suerte haberse familiarizado, entre los 12 y los 16 años, con la matemática a través de «libros que no eran muy notorios en cuanto a su rigor lógico, pero que suplían esto permitiendo que los principales pensamientos descollaran clara y sinópticamente» (Schilpp, p. 15). Los resultados científicos de G son más agudos y más penetrantes, en tanto que de los de Einstein se puede decir que son de contenido más rico y que se hallan involucrados en contextos más complejos. Sus concepciones pueden verse como proyecciones naturales de su obra científica. Mientras que G creía al parecer que era posible en filosofía una precisión comparable, a Einstein parece que le llamó la atención cómo decrece la precisión y aumenta el sentido cuando se pasa de la matemática a la física (y, análogamente, de ésta a la filosofía).

También se desprende de su actitud hacia la teoría cuántica (véase más adelante) que ni G ni Einstein estuvieron a favor del positivismo. La postura de G sobre esta cuestión es conocida. Einstein favoreció e influyó en el positivismo en el contexto de su relatividad especial, pero estaría sin duda de acuerdo con G en que «la fecundidad del punto de vista positivista en este caso se debe a una circunstancia del todo excepcional» (*MP*, p. 12). Así por ejemplo, según Einstein, el propósito de toda la física no es sino «la descripción completa de toda situación real (individual) (tal como se supone que existe al margen de cualquier acto de observación o substanciación). Siempre que el físico moderno de mentalidad positivista oye semejante formulación su reacción es sonreír conmiserativamente» (Schilpp, p. 667). Sin embargo, en la formulación de su postura, Einstein parece dejar a la mente más lugar que G para la libre creación.

Consideremos los dos pasajes siguientes (*ibíd.*, pp. 674 y 669) de la respuesta de Einstein a sus críticos:

> [Mi actitud teórica] se distingue de la de Kant únicamente en el hecho de que nosotros no concebimos las «categorías» como inalterables (condicionadas por la naturaleza del entendimiento) sino como convenciones libres (en el sentido lógico). Parecen *a priori* sólo en la medida en que pensar sin postular categorías y conceptos en general sería tan imposible como respirar en el vacío.
>
> «Ser» es siempre algo que es mentalmente construido por nosotros, es decir, algo que postulamos libremente (en el sentido lógico). La justifica-

ción de tales construcciones no reside en su derivación de lo que es dado por los sentidos. Este tipo de derivación (en el sentido de derivabilidad lógica) no lo encontraremos en ningún sitio, ni siquiera en el dominio del pensamiento pre-científico.

Estoy seguro de que G tendría algo que objetar a las tres expresiones «convenciones libres», «mentalmente construido por nosotros» y «postulamos libremente». Pero no sé hasta qué punto el desacuerdo sería sustantivo más que terminológico y un tanto extrañamente psicológico. Una distinción análoga la constituye la insistencia de G en que los conceptos no cambian; sólo lo hacen nuestras percepciones de ellos. Así, por ejemplo, Einstein dijo también, «Para quien es un descubridor en este campo [la física teórica], los productos de su imaginación parecen tan necesarios y naturales que él los considera, y quisiera que los demás los consideraran, no como creaciones del pensamiento sino como realidades dadas» (*Ideas and Opinions*, p. 270). Cabe suponer que, para la mayoría de los propósitos, hay poca diferencia entre que optemos por hablar de descubrimiento o de creación. Pero creo que la clara preferencia de G por pensar en términos de descubrimiento tiene mucho que ver con su fuerte deseo de Sicherheit (certeza y seguridad) en el sentido de recibir el apoyo de un último tribunal de apelación. Aparte de esto, no veo que la convergencia de nuestras cambiantes percepciones (de conceptos fijos) sea más fácil de discernir que la de nuestros cambiantes conceptos. Pero probablemente se me esté escapando algo esencial en el desacuerdo que sea más sutil y que sólo pueda apreciarse en una filosofía más ampliamente desarrollada.

De la física cuántica, G dice que la actual teoría de «dos niveles» (con su «cuanticización» de un «sistema clásico», y sus series divergentes) es, indudablemente, muy insatisfactoria (*MP*, p. 13). Hay informes más amplios de la insatisfacción que a Einstein le producía la mecánica clásica en tanto que teoría «completa». Aunque se dice con frecuencia que él tenía preferencia por el determinismo, Pauli insiste en que sus ideas no tienen nada que ver con éste, sino con su creencia en el realismo. (Véase, Max Born, *The Einstein-Born Correspondence*, 1971, pp. 221-226.) Einstein no niega que el principio de incertidumbre esté concluyentemente «demostrado» y espera que aparezca una teoría satisfactoria que contenga las relaciones formales que en la física cuántica se dan como consecuencias (Schilpp, pp. 666-667). Según Pauli, él cree e insiste en que un macrocuerpo tiene siempre una posición cuasi-claramente definida en

la «descripción objetiva de la realidad». En palabras del propio Einstein, «En la esfera macroscópica se considera simplemente cierto que uno debe adherirse al programa de una descripción realista en el espacio y en el tiempo» (Schilpp, p. 671). Parece que él busca una teoría completa en la que la teoría cuántica sea vista como una descripción de conjunto, en tanto que sus oponentes quieren adherirse a la teoría cuántica también en sus (aparentemente todavía inobservadas) consecuencias para los macrocuerpos: «Un macrocuerpo tiene en principio que mostrar fenómenos de difracción (interferencia), y las dificultades es probable que sean *técnicas* debido al pequeño tamaño de la longitud de onda» (Pauli, citado en Born, p. 222).

Un conocido impacto de la relatividad general en la filosofía lo constituyó la muy difundida idea de que refuta la teoría kantiana de nuestra intuición espacial y su relación con la geometría. Esta ha solido ir acompañada también de una propensión a dudar de o incluso a rechazar toda apelación a la intuición. Pero, como ahora sabemos, la situación actual es bastante más compleja. Según G, «En geometría, el sentido generalmente adoptado hoy hace referencia a la física más que a la intuición matemática, con lo que, por consiguiente, una decisión [como la referente a si el quinto postulado de Euclides es verdadero] cae fuera del dominio de las matemáticas» (BP, p. 271). En una carta (octubre de 1973) a M. J. Greenberger (p. 250 de su *Euclidean and non-Euclidean Geometries,* 1980, segunda edición) G escribía, «La intuición geométrica, estrictamente hablando no es matemática, sino intuición física *a priori.* En su aspecto puramente matemático, nuestra intuición especial euclídea es perfectamente correcta, es decir, representa correctamente cierta estructura existente en el dominio de los objetos matemáticos. Incluso físicamente, es correcta "en lo que se refiere a lo pequeño"».

En los años cuarenta G trabajó sobre la relación entre la filosofía kantiana y la teoría de la relatividad y señaló que ambas se pueden considerar que llevan a la tesis idealista de que el tiempo y el cambio no son reales. Una versión breve de sus ideas fue ofrecida en su contribución al homenaje a Einstein (Schilpp, pp. 557-562), que también mencionaba sus nuevas soluciones a las ecuaciones einstenianas del campo. En su respuesta (p. 687) Einstein calificó el trabajo de «importante contribución a la teoría general de la relatividad, especialmente al análisis del concepto de tiempo», pero declinó discutir «la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía

idealista o cualquier formulación filosófica de cuestiones». (Para una consideración más amplia de este aspecto de la obra de G, consúltese la sección 6.5.)

En sus dos cartas a Seeling (otoño de 1955), G analiza su propio trabajo en teoría de la relatividad así como algunas de sus ideas sobre ciertas direcciones de ulteriores desarrollos (Seeling, pp. 421-423):

/Mi trabajo sobre teoría de la relatividad se relaciona con la teoría pura de la gravitación publicada en 1916 que, en mi opinión, fue dejada no sólo por el propio Einstein sino también por toda la generación de físicos contemporáneos, en un estado incompleto, desde el punto de vista físico, matemático, y en lo que se refiere a su aplicación en cosmología./

En lo que se refiere al ulterior desarrollo de la teoría gravitacional pura, del que hablaba en mi última carta, no lo tomo como una extensión en el sentido de que la teoría debe abarcar un dominio más amplio de hechos, sino como un análisis matemático de las ecuaciones que harían posible conseguir sistemáticamente sus soluciones e identificar las propiedades generales de las mismas. Hasta ahora ni siquiera conocemos el equivalente de las fórmulas integrales fundamentales de la teoría newtoniana que, en mi opinión, es incuestionable que existen. Si tales fórmulas integrales así como otras fórmulas matemáticas tuvieran un significado físico, entonces la comprensión física de la teoría se vería con ello intensificada también. Conversamente, un análisis más preciso del contenido físico podría llevar a tales teoremas matemáticos. Einstein no se abstuvo de tales propósitos, al menos del primero (de los dos), pero era poco optimista acerca de ellos. —La razón por la que yo no he emprendido la tarea de estudiar estos problemas es simplemente que quedan muy alejados de mi propia área de trabajo, que no es otra que la de la lógica y los estudios de fundamentos, y, de otro lado, a que son tan difíciles que requerirían toda la capacidad de trabajo de un matemático. No obstante, durante algún tiempo, me he ocupado, en conexión con ciertos problemas filosóficos, de un complejo de problemas de la teoría general de la relatividad menos difícil: la cosmología. El hecho de que, sin ser más que un principiante en el dominio de la teoría de la relatividad, pueda llegar enseguida a resultados esencialmente nuevos me parece que es una prueba suficiente del estado inacabado de la teoría.

En respuesta a mi investigación acerca de las «fórmulas integrales» de la cita anterior, Howard Stein me contó que la existencia de un conjunto de «integrales globales universales» para la mecánica newtoniana se halla afirmada en las leyes de conservación y estre-

chamente conectada con la invariación espacial y temporal de las leyes newtonianas: «La ausencia de simetrías espacio-temporales universales en la relatividad general significa que no hay allí disponible ningún teorema integral derivado de forma análoga, y lo que Gödel claramente busca es "un análisis matemático de las ecuaciones" de la teoría einsteiniana que lleve a *algún* tipo de teoremas generales acerca de la estructura de sus soluciones, en el sentido en que las leyes de conservación son teoremas generales acerca de la estructura de las soluciones a las ecuaciones newtonianas.»

No ha dejado de plantearse la pregunta de si se puede lograr un teorema de Gödel para la física. Así por ejemplo, en 1979, F. Dyson afirmaba, «Hace cuarenta y ocho años, Kurt Gödel, que luego se ha convertido en uno de los amigos más íntimos de Einstein, demostró que el mundo de la matemática pura es inagotable... Mi esperanza es que seremos capaces de probar que el mundo de la física es tan inagotable como el de la matemática» (Woolf, p. 379). Como quiera que la física emplea la suficiente matemática para probar el teorema de G, hay un sentido obvio en el que es incompletable. Pero necesitamos una noción distinta de incompletud para captar la idea de la (in)agotabilidad de la física. Dyson hablaba de ciertos físicos que creen que «están próximos a alcanzar una comprensión total de las leyes básicas de la naturaleza». Es evidente que un primer paso necesario para poder probar la «inagotabilidad» de la «física» es esclarecer las dos nociones que aparecen en el problema.

Straus proseguía con la idea de Dyson: «Una de ellas creo que fue mencionada ayer por el profesor Dyson: La idea de que una teoría última, que Einstein no dejó de tener muy arraigada en su mente, sería algo tan poco atractivo como la idea de convertir a todos los matemáticos en una especie de magnífico computador que se sirva del algoritmo de Hilbert, con el que Gödel había acabado de un modo efectivo» (*ibíd.* pp. 484-485). [Esto no es del todo correcto, ya que no había «algoritmo de Hilbert» con el que acabar, salvo en el hipotético sentido de que Hilbert buscó e incluso tal vez pudo haber esperado que existieran sistemas formales completos en matemáticas y un procedimiento de decisión para la lógica elemental. Fue mérito de Hilbert el haber formulado el problema en términos tan completamente precisos que G lo resolvió.]

Straus pasaba luego a parafrasear la respuesta de Einstein a la cuestión de qué quedaría por hacer para los físicos. «Bien, si se estableciera la teoría definitiva, la física se hallaría en la misma situa-

ción en la que la matemática se halla ahora. Es decir, entonces uno comienza a probar teoremas. En este momento lo que los grandes físicos hacen es buscar axiomas. Los matemáticos no hacen eso. Ellos tienen axiomas y buscan teoremas.» Esta observación pasa por alto el caso excepcional de la búsqueda de nuevos axiomas en teoría de conjuntos. También recuerda uno de los proyectos de G de buscar axiomas en metafísica.

G considera que la física de Newton es una teoría axiomática exacta. Había sido considerada como la teoría definitiva durante largo tiempo, cuando los físicos no buscaban más que «teoremas» en el sistema newtoniano. La búsqueda subsiguiente (por Einstein y otros) de una teoría definitiva en el sentido de una teoría unificada revela una conciencia de incompleción esencial, que había estado ausente durante unos dos siglos con respecto a la teoría newtoniana. Si la teoría de Newton ha sido erróneamente considerada como la teoría definitiva durante tanto tiempo, ¿qué impedirá la repetición de semejante error (a mayor escala) si y cuando la comunidad de los físicos crea que han obtenido la teoría definitiva? El deseo de G de «hacer con la metafísica lo que Newton hizo con la física» (*MP,* p. 85) indica una distinción entre «agotar» la física o la metafísica y descubrir su «espina dorsal». En otras palabras, como la física newtoniana no es la teoría definitiva, G no buscaba una teoría definitiva en metafísica, sino una especie de espina dorsal. La propia postura filosófica de G no parece excluir la posibilidad de que, aunque la matemática sea inagotable, la física pueda resultar ser «agotable» en algún sentido apropiadamente significativo. No tengo, sin embargo, idea alguna de qué sentido pudiera ser ése. A mí me parece más plausible que, aunque el ser capaz de creer que aquello tras lo que uno anda es la teoría última puede incrementar la dedicación de uno a la tarea, esto no es una proyección racional extraída de la evidencia empírica.

En 1952, un estudiante de filosofía de la universidad de Brown escribió a Einstein pidiéndole una breve nota aconsejándole. En su respuesta (el 9 de diciembre) Einstein hacía el siguiente comentario acerca del lugar del conocimiento empírico en el trabajo teórico. «Es cierto que alcanzar la verdad no es posible sin base empírica. Sin embargo, cuanto más profundamente nos adentramos y más amplias y extensas son nuestras teorías, menos conocimiento empírico se requiere para su determinación.» (*Albert Einstein, the Human side,* selección y edición de H. Dukas y B. Hoffmann, 1979, p. 29.)

Se puede ver que el espíritu de esta observación concuerda con la idea de G de que para hacer filosofía fundamental no se requiere un conocimiento empírico muy amplio.

El 27 de enero de 1921 Einstein respondía a una pregunta sobre la naturaleza del Arte y de la Ciencia lo siguiente (*ibíd.*, pp. 37-38): «Allí donde el mundo deja de ser el escenario de nuestras esperanzas y deseos personales, donde nos enfrentamos a él como seres libres que admiran, preguntan y observan, entramos en el terreno del Arte y de la Ciencia. Si lo que se ve y se percibe se comunica en el lenguaje de la lógica, estamos en la ciencia. Si se comunica a través de formas cuyas conexiones no son asequibles a la mente consciente sino que se ven como significativas intuitivamente, entonces estamos en el arte. Ambas cosas tienen en común la ferviente dedicación a algo que transciende el interés y la volición personales.»

El enunciado hace hincapié en un estado «libre» que deja fuera los problemas de abrigo y alimento, así como las esperanzas y temores que acompañan a los enredos emocionales de las relaciones humanas; ni qué decir tiene que semejante estado no puede ser más que un aspecto de la vida real. La contraposición entre Arte y Ciencia se puede caracterizar en términos de sus diferentes modos de comunicación. Hay más similaridad en lo que se refiere al proceso de prosecución de uno u otra. En ambos casos obedecemos implícitamente a la lógica, y oscilamos entre lo consciente y lo inconsciente, lo articulado y lo inarticulado (aun cuando sea consciente). Pero el Arte en tanto que tipo distinto de comunicación depende más (más intensamente) de la intuición, como se desprende del hecho de que requiera un procedimiento mucho más complejo para parafrasear y desarrollar las creaciones artísticas existentes. El proceso de aprender a apreciar el Arte es también muy distinto del de la Ciencia. Tomando una expresión de Russell, podemos decir que la intuición produce «conocimiento directo», el cual ocupa un lugar más importante en el Arte, tanto en lo que respecta a su creación como a su apreciación. Al cultivar y aplicar nuestra intuición parece que generalmente es más satisfactorio partir de un todo más amplio (e.g., la intuición en sus manifestaciones en diversas áreas más que sólo en la del conocimiento). De lo contrario, sería difícil poner juntos los momentos (o aspectos) adquiridos por separado.

En 1937, sin duda con la situación de Alemania en la mente, Einstein observaba, «La política es un péndulo cuyas oscilaciones entre la anarquía y la tiranía se ven alimentadas por ilusiones pe-

rennemente renovadas» (*ibíd*, p. 37). Desde luego, no podemos considerar esto como una verdad *a priori*. En tanto que generalización empírica posee interés aun cuando su «verificación» sea un asunto complejo. Ni qué decir tiene que las «ilusiones» son un constitutivo importante de la realidad humana, y no sólo en política.

5.2. **Comentarios sobre los capítulos siguientes**

Los capítulos que quedan constituyen un intento preliminar de establecer mis acuerdos y desacuerdos con Gödel, como prometí en *BA* (pp. 23-24, nota 21). La tarea ha resultado ser de mucha mayor envergadura de lo que había pensado antes de elaborar los hechos (recogidos en la parte I) y las conversaciones (que serán organizadas e incluidas en *CG*). Lo que digo sobre filosofía en esta parte no puede considerarse más que como un bosquejo tentativo, el cual, espero y confío en que pueda ser reconsiderado en el contexto de una exposición más directa de mis tesis.

No hay lugar para el desacuerdo con el admirable trabajo científico de G y su interacción inmediata con sus ideas filosóficas (en tanto que heurística y en tanto que consecuencias). No es sino cuando un enfoque que ha tenido éxito en un dominio se «proyecta» más allá del mismo cuando se plantea la cuestión de hasta qué punto y en qué medida resulta justificable la proyección. Adentrándose uno más profundamente en un aspecto de la experiencia de una cultura, me parece (como creo que también a G) que uno penetra en una región central que intensifica la comprensión de todos los aspectos de la experiencia humana. Así por ejemplo, una comprensión más adecuada de la naturaleza de las matemáticas, que revele más y más ricos rasgos comunes a otras actividades intelectuales y artísticas, arroja mayor luz sobre el papel desempeñado en todos los entramados culturales por las intuiciones, idealizaciones, metáforas y evidencia empírica. Esta es la razón por la cual, si esos rasgos son vistos desde una perspectiva adecuada, una penetración mayor en un área no sólo no la separa, necesariamente, más drásticamente de las demás sino que más bien ayuda a combatir la fragmentación y el conflicto superficial entre posturas filosóficas distintas. Donde me parece que no estoy de acuerdo con G es en mi menos audaz propensión a querer prestar atención también a la especificidad de distintas zonas fundamentales de nuestra experiencia

acumulativa, en contra de su aparente creencia en la contundente centralidad de la experiencia matemática.

En filosofía encuentro atractiva la recomendación de G de que se sea selectivo (confinándose uno a lo esencial), preciso, desprejuiciado (abierto de mente), precavido y (no obstante) audaz. Pero estas virtudes están sujetas a interpretaciones diversas. G parece perseguir el nivel de precisión alcanzado en matemáticas. Si se lograra, las otras virtudes recibirían una dirección, criterio y formulación más concretos. Pero ni siquiera *su* obra filosófica es precisa en este sentido fuerte y yo dudo de que este ideal sea en conjunto realista en lo que respecta a la filosofía. Una noción menos restrictiva y objetiva de precisión es «pintar únicamente lo que uno ve con claridad». La capacidad de ver con claridad y de pintar bien varía de una persona a otra y, dentro de una misma persona, de un momento a otro. Por otro lado, la claridad comparte con la precisión la mayoría de sus ambigüedades. No obstante, la precisión, entendida en este sentido, es un destacado y vigoroso criterio necesitado de frecuentes consultas, especialmente cuando uno se aparta de los derroteros trazados en filosofía.

Las cinco virtudes recomendadas son relativas a aquello de lo que uno parte y adquieren una mayor significación desde una perspectiva adecuada de lo que es central o cierto. G tiene un sentido muy desarrolllado de los distintos grados de centralidad y certeza (especialmente en matemáticas). El ser selectivo, abierto de mente, precavido o audaz está regido por la idea de desarrollar y estructurar su cosmovisión de tal modo que se incremente su certeza (y claridad) mediante importantes penetraciones en y ordenaciones de los puntos seleccionados conforme a los grados interrelacionados de centralidad y certeza de todos los componentes. Estoy de acuerdo con esta idea, pero, como mi punto de partida es distinto, el cuadro incompleto que tengo y el más completo que persigo también son distintos de los de G.

G y yo me parece que estamos de acuerdo en creer que las inducciones empíricas son importantes para hacer filosofía, no sólo a la hora de predecir el futuro (cosa que está implícita en el «optimismo racionalista» de G y en la estimación de qué enfoques filosóficos resultarán más fructíferos) sino también a la de evaluar qué se toma (se ha de tomar) como hechos (en lo que respecta a su grado de importancia, certeza, etc.). Pero como él y yo partimos de bases distintas (por razones que no carecería de interés determinar), nues-

tras prioridades difieren y ambos hacemos distintos «cálculos probabilísticos». Las instancias más destacadas tienen que ver con el desafío de G ante el generalizado escepticismo «moderno» hacia lo sobrenatural (que para él forma parte de los «prejuicios de la época»). Afirma, no sé con qué grado de seriedad, que los «espíritus» fueron más activos en la antigüedad de lo que lo son hoy día. Más relevante y significativa es su predicción de la emergencia de la metafísica (religiosa) como una teoría exacta no andando mucho el tiempo (*MP*, p. 85), hecha sobre la base de que los fracasos pasados en esta dirección fueron debidos al estado menos avanzado de la ciencia y a los prejuicios del «materialismo» (en épocas más recientes) o de la teología (errónea) (en épocas anteriores).

No tengo ninguna duda de que G estaría de acuerdo con mi crítica del «empirismo analítico» y con la concepción alternativa de la matemática bosquejada en *BA* (resumida en las pp. 10-26). Pero no soy capaz de convencerme a mí mismo de la aplicabilidad universal del realismo matemático o conceptual de G. G expresa su simpatía hacia Platón diciendo que él es, como Platón, un «idealista» y su antipatía por Aristóteles llamándole «empirista» y «materialista». Creo que yo concedo más importancia que G a lo contingente y a lo impredecible, siento mayor necesidad de estar con los pies en la tierra, me preocupo más de lo cismundano, y estoy más dispuesto a considerar más experiencias humanas básicamente nuevas (adquiridas desde los días de Platón o Leibniz) filosóficamente relevantes. [Se ha dicho que Platón representa la más elevada forma de unidad de humanismo apolíneo (centrado en lo intelectual, más presente en los primeros y últimos diálogos) y dionisíaco (en lo emocional o místico, más presente en los diálogos medios). La filosofía de G parece apuntar a una combinación similar, sólo que es difícil imaginar a Platón tratando de conseguir «una filosofía entendida como una teoría exacta» o a G escribiendo amplios pasajes «poéticos».]

Si A y B tratan de conseguir diversas cosas (pongamos C y D) en filosofía, cabe preguntar todavía si C es más significativo o tiene más probabilidades de ser alcanzado que D. Pero es probable que a A le parezca sencillamente que C es más valioso que D, y entonces tenemos un desacuerdo a un nivel distinto. Por otro lado, si ni C ni D son alcanzados o alcanzables, entonces siempre es posible que B reconozca que lo conseguido por A persiguiendo C es más significativo que lo conseguido por B persiguiendo D. Además, puede ocurrir que A considere a C (y B a D) como el mejor medio de llegar a

una meta compartida E. La cuestión que entonces se plantea es la de quién de los dos, si A persiguiendo C o B persiguiendo D, se acerca más a E. En este complejo de alternativas abstractas se halla también implícita una referencia a la comunidad o comunidades de las que A y B cabe pensar que son miembros. Sus contribuciones pueden tomarse como partes de esfuerzos cooperativos. Las perspectivas generales de A o de B pueden resultar atractivas o inaceptables para una u otra de las comunidades a que A y B pertenecen. Una cuestión natural y extraordinariamente difícil es por qué A y B están en desacuerdo (en lo que respecta a temperamento, carácter, educación, clase de la que provienen, deseos, experiencia total, etc.).

Esta lista de cuestiones y posibilidades muestra lo difícil que resulta evaluar un enfoque filosófico global y peculiar como el de G. El no parece encontrar muchas cosas que sean relevantes para la filosofía en la experiencia histórica a partir de comienzos del siglo XVIII, siendo las únicas excepciones los avances habidos en las ciencias exactas y tal vez la búsqueda de un método por parte de Husserl. Por otro lado, tiene poca fe en la exactitud básica de la historia escrita. Según él, la tarea básica estriba en comprender al individuo mediante la comprensión de uno mismo, y, para esto, lo que se requiere primordialmente es la introspección. No carece de atractivo la idea de que cada uno de nosotros posee todos los datos necesarios y de que la verdadera filosofía es sólo cuestión de ver las cosas con claridad mediante el tipo de pensamiento correcto (o el ejercicio adecuado de la razón pura de uno). Cuando uno se comprende a sí mismo, dice, uno lo comprende todo (incluidas la sociedad y la historia). Los sólidos logros siguiendo la línea del «conócete a ti mismo» obtenidos por introspección son importantes para uno mismo y, si se los comunica adecuadamente, también para otros. También tienen un valor más permanente en la medida en que son más fundamentales en el sentido de ser menos dependientes de otros factores que las «superestructuras». G reconoce que servirse de este tipo especial de «pensamiento filosófico» en la vida diaria es generalmente perjudicial. Sólo los frutos de semejante pensamiento son directamente relevantes para la creencia de G de que la buena filosofía es de mucha utilidad.

Pero las relaciones sociales incluyen componentes que no pueden captarse por el simple procedimiento de comprender a un individuo «típico», y el comprender a una persona individual como un

«animal social» depende en buena medida de considerar interrelaciones entre distintas personas. No es raro que, en ciertos aspectos, otros tengan mejor conocimiento de una persona del que él tiene de sí mismo. Por lo demás, estamos todos muy lejos de comprendernos a nosotros mismos del todo y de ser capaces de comunicar nuestra comprensión. G parece compartir con Leibniz la creencia de que toda persona es una mónada sin ventanas al exterior. De ahí que, al afrontar la separación obvia entre deseo y realidad en la vida de uno, el conocido remedio consistente en identificarse uno parcialmente con una comunidad o con un país o con la humanidad sea menos efectivo para él y que tenga que recurrir por ello a la creencia en otra vida.

Tal vez deba considerar la filosofía de G distinguiendo en ella varios niveles. Está en primer lugar el relativamente bien desarrollado objetivismo en matemáticas, que encuentro atractivo y convincente. Cuando este objetivismo se amplía a conceptos que se consideran siempre precisos y permanentemente fijos, considero la «idealización» demasiado fuerte y demasiado alejada de nuestra experiencia familiar con los conceptos. Su concepción de los conceptos está relacionada con la parte de sus ideas que atribuye a Husserl. Afirma que no le gusta el complicado modo de hacer filosofía que tiene Husserl y que Husserl necesita seguidores capaces, del mismo talento o mayor que el de él. Pero esta necesidad de seguidores capaces puede arrojar dudas sobre el declarado ideal husserliano de filosofía como una ciencia rigurosa, toda vez que la ciencia puede ser cultivada fructíferamente también por personas menos capaces. Además, G busca en filosofía una teoría exacta o axiomática y cree que éste es también el objetivo de Husserl. Pero la concepción que G tiene de la metafísica como filosofía primera incluye los conceptos de Dios y de alma. Parece que este componente religioso no forma parte de la concepción husserliana de la filosofía. G posee el ideal de una religión buena y racional capaz de llegar directa y convincentemente a cada individuo, el cual como mónada sin ventanas que es, verá que la razón prevalece sobre el todo, que las potencialidades se realizarán, y que los buenos actos serán debidamente recompensados. El atractivo de semejante religión es innegable, pero la mayoría de nosotros me parece que buscamos aproximaciones a semejante ideal por medio de una cierta fusión de lo individual con una parte más amplia del universo (generalmente con la humanidad o partes de la misma).

Reduccionismo y «deduccionismo»: En lo referente a la metodología, simpatizo con un importante aspecto de la obra de G. Llamémosle «deduccionismo», en tanto que opuesto al reduccionismo. Los números pueden ser reemplazados por (o reducidos a) cuerdas o golpes, y las fórmulas numéricas por (o a) fórmulas de la lógica elemental. Pero el «aumento conceptual» va acompañado de una pérdida de eficacia, y en nuestro pensamiento seguimos concibiendo los números en términos de la notación familiar (para una amplia discusión de esta cuestión, véase *MP*, capítulo 7, y Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*). Un caso más conocido lo constituye la reducción de la matemática a la lógica o más bien a la teoría de conjuntos. Si, como G hace algunas veces, consideráramos la naturaleza de las matemáticas empleando como sustituto de las mismas la teoría de conjuntos, estaríamos adoptando una postura que es una mezcla de reduccionismo y deduccionismo. Como el dominio de los conjuntos es más amplio que el de los números (y sus funciones), en cierto sentido estamos buscando un área más rica que incluye ramas de la matemática como casos especiales. Este tipo de práctica es lo que llamo «deduccionismo». Por otro lado, la teoría de conjuntos es también más pobre, en el sentido de que en ella nuestras intuiciones geométricas y de teoría de números están ocultas o al menos disimuladas. Si uno pasa por alto estos componentes esenciales de las regiones reemplazadas (o eliminadas), yo consideraría esto como un caso de «reduccionismo» practicante. Así por ejemplo, G recomienda exponer el objetivismo concentrándonos en números naturales (más que en conjuntos) basándose en que tenemos una intuición más fuerte de ellos y resultan menos controvertidos. Yo diría, por tanto, que, en este caso al menos, G no es un reduccionista.

Mi intención es contraponer la preocupación por la «economía» (o la apresurada marcha hácia «nada más que» la conclusión) a la opción de partir de una más rica y global situación que incluye las más simples o específicas como casos especiales. Ejemplos conocidos de reduccionismo son el behaviorismo, el fisicalismo reductivista (mejor que «fisicalismo sin reduccionismo», véase más adelante), el determinismo económico (en su forma dogmática), el cientificismo (o la reducción de todos los tipos de razón a la razón técnica), etc. Lo que me parece objetable es la exclusividad. Una idea afín es la creencia de que logrando una cosa (por ejemplo, consiguiendo poder), lo demás se dará por añadidura. En la vida real, es desde

luego deseable elegir y centrarse en alguna tarea importante y realizable, pero al mismo tiempo uno no debe perder de vista la limitada importancia de la misma. De ahí que el intento de adoptar un punto de vista más amplio sea seguramente una de las cosas que distinguen a la filosofía de la política o el periodismo.

El ideal del «deduccionismo» tiene la desventaja de tener que atender directamente a la situación más rica y más compleja. Un ejemplo lo constituye la decisión de Leibniz, secundada por G, de dotar a todas las mónadas de vida y de conciencia. Otro ejemplo es el de partir del cambio y tomar lo fijo como un caso especial. Otra idea sugestiva pero difícil de llevar a la práctica es la de partir de la «praxis»: Si la filosofía «parte del hecho, se coloca a sí misma dentro del mundo de la existencia y de la finitud y le resultará difícil descubrir el camino que lleva desde allí hasta lo infinito y suprasensorial; si parte de la acción se situará en el punto en el que los dos mundos se encuentran y desde el que los dos pueden verse de una ojeada» (Fichte, *Werke,* vol. 3, p. 52, de la segunda introducción a *Wissenschaftslehre*). Una ilustración más es la consistente en asimilar la verdad a la metáfora. Una metáfora transfiere un término a algo «a lo que no resulta propiamente aplicable». Dado que sólo conseguimos la total exactitud en casos excepcionales, la mayoría de las veces hablamos en términos de metáforas que, si son adecuadas, nos llevan a acciones dirigidas a matizar y captar (lo que de verdadero hay en) la metáfora. En lugar de considerar lo metafórico como una desviación de la verdad, puede resultar más liberador considerar la verdad como un caso (especial) límite de lo metafórico.

La primera instancia de deduccionismo en G yo creo que es su afirmación de que el natural concepto de existencia reside en lo que se considera que es su sentido más amplio o más débil. Mesas y sillas, ácidos nucleicos y proteínas, partículas elementales y quarks, números y conjuntos, conceptos, mentes, personajes mitológicos: todo ello existe, aunque no siempre en el espacio físico. «¿No ejerció acaso su dominio el Moloc de los antiguos? ¿No tuvo acaso un poder real en la vida de los griegos el Apolo délfico? En este contexto la crítica kantiana carece de sentido» (Marx, en el apéndice a su tesis doctoral).

Reducción y reduccionismo suelen asociarse con varias ideas distintas. Es innegable que el ver que los números se pueden «reducir a» conjuntos (o que los genes no son sino moléculas grandes) incrementa nuestra comprensión. Pero, en contra de una de las acep-

ciones del «reduccionismo», la «reducción» no implica que los números no existan, o que los significados de los mismos (nuestras intenciones respecto a ellos) queden agotados por sus conjuntos correspondientes, o que debamos o tengamos que dejar de trabajar con números. Según Engels, «La acción química no es posible sin cambio de temperatura y cargas eléctricas, la vida orgánica sin cambios mecánicos, moleculares, químicos, térmicos, eléctricos, etc. Pero la presencia de esas formas secundarias no agota la esencia de la forma principal en cada caso. Un día "reduciremos" el pensamiento experimentalmente a cambios moleculares y químicos del cerebro, pero ¿agota esto la esencia del pensamiento?» (*Dialectic of Nature,* escrito entre 1872 y 1882, trad. de J.B.S. Haldane, 1940, pp. 174-175). La postura mantenida por Engels puede describirse, si se quiere, como «fisicalismo sin reduccionismo». G cuestiona la predicción contenida en la primera mitad de la última sentencia pero acepta sin duda la implícita respuesta negativa a la cuestión de la conclusión.

El reduccionismo incluye a veces la creencia de que carece de sentido estudiar la vida directamente, además de investigar su química y su física (o, en el caso de G, estudiar la sociedad directamente además de dedicarse a conocerse a uno mismo), porque no lleva a ningún conocimiento real. Esta creencia general difícilmente puede ser verdadera en todas las circunstancias, y a mí me parece una proyección sesgada de alguna evidencia aislada y parcialmente asimilada a lo que es del todo ignoto. Expresado en términos del un tanto impreciso contraste entre reduccionismo y deduccionismo, lo que estoy queriendo decir es que me gustaría ser un deduccionista más consistente que G. (Creo que he dicho bastante tanto en *BA* como en este libro como para que se distinga esta actitud deduccionista de lo que en la literatura se conoce con los nombres de holismo y gradualismo.)

Esta actitud presupone la condición de que se dedique atención a la especificidad de cada uno de los principales casos específicos que caen bajo un esquema general. En *BA* he tratado de resumir (pp. 37-44) algunas de mis vagas ideas introduciendo el término metafórico «fenomenografía», que es un barbarismo. Ahora me parece preferible sustituirlo por el de «fenografía» (por analogía con «fenotipo»). La tarea de dotar al nombre de un contenido claramente definido sigue estando lejos de su realización. Teniendo en cuenta el deseo de ser comprehensivo y de esquivar el reduccionismo, no es extraño que la empresa de seleccionar y organizar los elemen-

tos esenciales tienda a ir en todas las direcciones. En cada una de ellas, a menudo me impresiona y deja boquiabierto la riqueza y profundidad de la experiencia humana, así como el atractivo modo en que se la comunica. La reflexión sobre las ideas de G me ayuda en cierta medida a enfocar mi atención en aquellas áreas cuyo interés es más compartido. Pero el alcance de este foco es un tanto limitado, ya que a mí también me interesan mucho áreas que a G le parecen secundarias o no esenciales.

El ambicioso ideal de G de hacer con la metafísica lo que Newton hizo con la física (dotándola de una «teoría axiomática» correcta en lo esencial) a primera vista parece ofrecer un punto de vista más efectivo para dirigir su trabajo. Pero aunque este ideal parezca relativamente concreto, los modos de alcanzarlo, los cuales incluyen, según G, el ver las cosas con claridad y el explicar lo que se ve, ya no lo son tanto. En su opinión, él no ha determinado siquiera cuáles son los conceptos primitivos, ni menos aún ha hallado los «axiomas» correctos para ellos. Parece que ha buscado diligentemente una guía o al menos sugerencias en las obras de Leibniz, Husserl, y, en menor medida, en algunos otros filósofos. Tiene sin duda un sentido desarrollado de lo que se debe dejar de lado, por lo que está más capacitado que otros para hacer progresos. Pero ni siquiera dicha ventaja resulta de gran ayuda cuando el ideal es tan ambicioso (y yo diría que poco realista) como el suyo. Esto no excluye naturalmente la gran probabilidad de que sus acercamientos parciales al ideal puedan ser importantes científica o filosóficamente hablando.

Al ser religioso («teísta») y creer en la posibilidad de desarrollar una teología buena y racional (o una metafísica religiosa), G cuenta con una perspectiva más objetiva y un programa más unificado. A través de la religión, uno tiene un contacto directo con el universo, de suerte que las consideraciones sociales se convierten en secundarias y de menor importancia. En el momento en que la religión pasa a considerarse como algo que está más allá del alcance de la razón, la filosofía pierde uno de sus principales principios unificadores. G parece querer continuar donde Newton y Leibniz lo dejaron y parece creer que el curso histórico ha sido, apartir del siglo XVII, regresivo más que progresivo, salvo en lo que respecta al incremento de información (que no de verdadera comprensión) en matemáticas y en ciencias naturales (así como en algunas otras áreas). Aunque su modelo es la física de Newton, sus simpatías se inclinan del

lado de Leibniz. No está satisfecho con el modo en que Newton concibe los conceptos físicos, y quiere continuar el intento leibniziano de analizar los conceptos con mayor profundidad de suerte que los conceptos físicos se fundan con los conceptos verdaderamente primitivos de la metafísica. De ahí que no le satisfagan, en concreto, los «fundamentos metafísicos» establecidos por Kant para la física (newtoniana más que leibniziana).

Una vez que se admite que la religión está más allá del alcance de la razón pura, la filosofía se hace más ramificada. No sólo se podrán tomar como subordinados a la metafísica religiosa los problemas cosmológicos y morales, sino incluso considerar el arte y la música como cosas que en otro tiempo tomaron buena parte de su inspiración de la religión. Dada su adhesión al espíritu de la Ilustración, Kant añade a las investigaciones leibnizianas de los fundamentos de la matemática y de la ciencia natural estudios independientes de moralidad, estética e «historia universal». El doble discurso y las alabanzas de pico para fuera que Kant hace de la religión no pueden satisfacer a ningún pensador serio y G parece acusarle de falta de sinceridad. (Así, por ejemplo, a comienzos de su *Religión dentro de los límites de la sola razón,* Kant dice «En su propio interés, la moralidad no necesita para nada de la religión... de ahí que el hombre que la considere imprescindible... para buscar en torno a él un fin [ulterior] sea ya, por este mismo hecho, despreciable».)

Marx, sirviéndose de algunas de las ideas de Hegel, eliminó sin ambages la religión de su concepción del mundo y situó las aspiraciones humanas en el cis-mundo colocando, la historia en el lugar de la religión. Desde entonces no ha aparecido ninguna filosofía de poder y generalidad comparables, y el marxismo ha seguido siendo hasta hoy una importante fuerza en política y en filosofía. A diferencia de lo que ocurre con las filosofías de Leibniz y de Gödel, la comunidad y la sociedad ocupan en las filosofías de Kant y de Marx un puesto tan decisivo como el individuo; pero Marx fue más allá que Kant al proponer un programa plausible con objeto de emplear la práctica social para mediar entre el individuo y la historia.

G ve en la obra de Husserl un medio de pulir y consolidar la monadología de Leibniz y cree que una cuidadosa reflexión sobre la experiencia diaria de uno llevará a una metafísica que dote a la ciencia y a la religión de un fundamento racional más seguro. Es probable que también considere útil la obra de Freud para desarrollar más

las reflexiones psicológicas leibnizianas. Yo quisiera modificar su programa dejando fuera la religión y la búsqueda de una «teoría axiomática», y añadiéndole consideraciones directamente relevantes para el arte, la sociedad y la historia.

Capítulo 6

CONCEPTOS EN EL AMBITO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGIA

La obra de Gödel está a horcajadas entre la ciencia (fundamental) y la filosofía; para él, ambas se ocupan de problemas conceptuales básicos y ambas tratan de llegar al descubrimiento de teorías axiomáticas. La diferencia entre ellas es, según él, que la filosofía analiza conceptos mientras que la ciencia emplea conceptos, pero estos dos tipos de actividad se hallan estrechamente conectados entre sí en los estudios fundamentales de una y otra área. Consideradas a esta luz, las contribuciones fundamentales de G pueden describirse como intentos tanto de desarrollar teorías axiomáticas de conjuntos y de conceptos también en metafísica, como de examinar minuciosamente el poder y los límites de una clase especialmente transparente de teorías axiomáticas: los sistemas formales (o las teorías axiomáticas mecánicas), con respecto a la lógica elemental y a la aritmética. Además, su trabajo sobre los conjuntos constructibles puede tomarse como el ofrecimiento de una teoría axiomática que, aunque no es un sistema formal, tiene una forma relativamente clara, y ha sido tachada de inadecuada para captar todo el contenido de la teoría de conjuntos.

En la práctica, G comenzó con grandes éxitos obtenidos en el ámbito de los sistemas formales, pasando luego, mediante lo que yo llamo «proyecciones propicias» a los programas más ambiciosos de búsqueda de teorías axiomáticas en regiones no cartografiadas. Hay

una analogía con el paso dado por Hilbert de los éxitos en áreas concretas de la matemática a su audaz (y, como mostró más tarde G, poco realista) programa sobre los fundamentos de la matemática, mediante una digresión en el campo de la física, en especial un flirteo serio con la impresionante teoría general einsteiniana de la relatividad (véase Pais, pp. 257-260). Pero G no ha formulado los problemas relativos a su programa sobre la metafísica con la suficiente claridad como para admitir o invitar a hallar una disconfirmación comparable a la que él halló para el programa de Hilbert. (Entre paréntesis, puede resultar interesante contraponer las distintas orientaciones de la digresión hecha por Hilbert en el campo de la física con la hecha por G tres décadas más tarde.)

Como G vio claramente a comienzos de la década de 1930, el concepto de sistema formal está estrechamente relacionado con el de procedimiento mecánico, y él considera el trabajo de Turing de 1936 un importante complemento de su trabajo sobre los límites de la formalización (véase *MP,* pp. 84-85). Es a través de esta vía como la obra de G entra en contacto con la tecnología y parece empezar a atraer la atención del público en una medida casi comparable con la de la obra Einstein (como muestra la obra de Hofstadter *Gödel, Escher, Bach,* 1979). Relacionada con esta cuestión está la influencia directa o indirecta de la obra de G sobre aquellas áreas conocidas con el nombre de ciencia de la computación e inteligencia artificial. Además, la obra hecha por G en esta dirección es tomada como un elemento de juicio a favor (más que en contra) del «mecanismo» (¡o incluso del «finitismo»!) por C. Webb (en su *Mechanism, Mentalism and Metamathematics,* 1980).

Dentro del limitado campo de la lógica matemática, la presencia de G es, naturalmente, notoria. Es innegable que es el mayor lógico de este siglo, y que su trabajo ocupa el centro mismo de todo este campo. Pero, al igual que Hilbert, su interés por los fundamentos de la matemática estuvo fuertemente motivado por una creencia en que los progresos básicos en esta área han de revolucionar en cierto modo todo el campo de la matemática (pura), como hizo el trabajo de Einstein con la física. En este sentido, me temo que el resultado ha sido más bien desalentador. Esto tal vez pueda tomarse como una confirmación de la temprana intuición que tuvo Einstein de que (todavía) en el cambio de siglo la matemática estaba más fragmentada que la física (Schilpp 1949, p. 15). Más tarde, Einstein hablaría de la obra de G como una prueba en contra de su creencia

en este sentido (véase, por ejemplo, Holton y Elkana, 1982, pie de la p. 422).

Pero la mayoría de los matemáticos no aceptarían el juicio implícito aquí de que la obra de G ocupa en matemáticas un lugar comparable al que ocupa la de Einstein en física. La obra de G ha ejercido poco efecto sobre la práctica de la investigación y sobre la concepción que de la matemática tienen la mayoría de los matemáticos. Curiosamente, ha tenido más impacto sobre las cuestiones conceptuales que tienen que ver con los computadores y la mecanización, cuestiones que son una preocupación central en la tecnología actual.

Hablando en términos generales, la obra matemática principal de G, dejando de lado la relativa a aritmética intuicionista, puede resumirse bajo tres encabezamientos: 1) CL, es decir, la completud de la lógica elemental (obra realizada en 1929, ensayo publicado en 1930); consúltese la sección 10.1); 2) IA, es decir, la incompletud de la aritmética (obra realizada en 1930, ensayo publicado en 1931; consúltese la sección 10.2); 3) CS, es decir, conjuntos constructibles (invención y aplicaciones de los conjuntos constructibles, obra realizada hacia 1938, ensayo publicado en 1939). En especial los resultados de 1) completud y 2) incompletud tienen una importancia fundamental para la idea del método axiomático y para toda la empresa de la formalización. Mientras que 1) prueba que la lógica elemental puede formalizarse, 2) muestra que la matemática no. Como 2) demuestra que el concepto preciso de sistema formal no puede captar toda la riqueza de rasgos de la vaga noción intuitiva (tradicional) de sistema axiomático, indica la existencia de una distinción entre sistemas formales y teorías axiomáticas.

6.1. **Computadores y procedimientos mecánicos**

Los procedimientos mecánicos más familiares son las computaciones domésticas y las operaciones de máquinas simples. Entre las máquinas físicas el componente matemático (o «informático» o «software») está especialmente claro en aparatos como teléfonos, ascensores y, naturalmente, computadores. En lo que se refiere a la contraposición entre computaciones numéricas y manipulaciones simbólicas (o procesamientos de datos no numéricos), las reglas establecidas por Frege (en 1879) para la lógica elemental (o los cono-

cidos procedimientos de demostración del álgebra booleana o del cálculo proposicional) pueden considerarse un ejemplo básico (y temprano) de las últimas, comparable en importancia al lugar ocupado por la aritmética doméstica en las primeras. Así por ejemplo, en la primavera de 1960, se presentaron en una conferencia varios lenguajes de programación para manipulaciones simbólicas, que empleaban todos ellos como ilustración un algoritmo concreto para el cálculo proposicional (consúltese el tema específico en *Communications of the Association for Computing Machinery,* vol. 3, abril 1960).

Las reglas fregeanas se sometieron en *PM* (1910) a un ulterior desarrollo para derivar cerca de cuatrocientos teoremas. En 1929, G mostró que eran completas, y en 1936 se demostró que la cuestión de si una proposición del lenguaje es deducible a partir de esas reglas es indecidible (véase más adelante). En 1958 yo diseñé un programa mediante el cual todas las consecuencias de las reglas ofrecidas en *PM* se prueban con toda rapidez en un computador relativamente primitivo (hoy, estándar, el IBM 704) (véase *IBM Journal,* vol. 4, 1960, pp. 2-22, recogido en mi *Survey,* pp. 224-268). En una dirección distinta, la geometría elemental, o mejor el álgebra real elemental (la teoría de los campos cerrados reales ordenados, versión formalizada de la teoría R de Dedekind) se demostró, en 1930 (mediante una extensión del teorema de Sturm) que es (en principio) decidible (véase Kreisel, p. 166), y en los setenta, que es indecidible en la práctica. Recientemente Wen-Tsun-Wu ha introducido un algoritmo realizable (que no es inadecuado considerar en el marco de los *Grundlagen der Geometrie* hilbertianos de 1899) que resulta aplicable a una parte importante de la geometría elemental y demuestra muchos teoremas difíciles (véanse los informes de Wu y S.C. Chou en *Automated Theorem Proving,* ed. de W. W. Bledsoe y D. W. Loveland, 1984).

Respecto del concepto de procedimiento mecánico, los teoremas de incompletud de G requieren una definición precisa por medio de la cual poder afirmar que se aplican a todo sistema formal, i. e., a todo sistema en el que una prueba se puede comprobar por un procedimiento mecánico. Es evidente que el programa hilbertiano incluía también el Entscheidungsproblem, cosa que reclamaba un procedimiento para decidir si una proposición dada de la lógica elemental es derivable de las reglas fregeanas (para la lógica elemental). Esto también requiere un concepto preciso de procedimiento mecánico, si la respuesta es negativa (como resultó ser el caso). Una

situación similar se produce para el décimo problema hilbertiano (de la lista de 1900), que reclamaba un procedimiento para decidir si una ecuación diofántica dada tiene o no solución. [Este problema fue investigado en el ensayo famoso de G, y su teorema VIII (*FG*, p. 612) puede considerarse como la inauguración de la línea de acercamiento que llevaría a una respuesta negativa al problema en 1970.]

El propio G hizo contribuciones al Entscheidungsproblem tanto decidiendo una subclase más interesante y natural (véase el capítulo 3, epígrafe 1929), como sugiriendo una respuesta negativa al problema general en el teorema X de su ensayo famoso (*FG*, p. 612). Por otro lado, también introdujo, en 1934, el concepto de función recursiva general (modificando una sugerencia de Herbrand), concepto que resultó que captaba también la noción intuitiva. No obstante, en opinión de G, fue la obra de Turing de 1936 sobre números computables (recogida en Davis, 1965) la que presentó por primera vez un análisis convincente que nos muestra la perspectiva correcta a través de la cual captar con claridad la noción intuitiva. Una vez que sólo se acepta como correcto el concepto preciso, sólo queda un corto paso no sólo para ver que los teoremas de incompletud de G son aplicables a todos los sistemas formales, sino también para demostrar que el Entscheidungsproblem es insoluble.

La demostración ofrecida por Turing de esta insolubilidad mostraba que una clase insoluble de problemas acerca de las máquinas de Turing puede expresarse mediante proposiciones de la lógica elemental. Su prueba fue pulida en 1961 con el empleo de proposiciones mucho más simples (de lo que pueden ser en la forma AEA). Por otro lado, en 1971, S. A. Cook fue capaz de relacionar ciertos problemas referentes a máquinas de Turing con el cálculo proposicional y, a partir de ahí, con cuestiones centrales relativas a la complejidad computacional (véase, por ejemplo, mi *Popular Lectures*, pp. 67 y 98). Hay una amplia clase de interesantes problemas que son equivalentes en el sentido de que si una clase puede decidirse en un tiempo polinómico, también todas ellas. Uno de estos problemas es el «problema de la tautología», que consiste precisamente en decidir para toda proposición del cálculo proposicional si es o no una tautología. Accidentalmente relacionado con este tipo de problema está la propuesta de que un algoritmo es factible o practicable sii (si y sólo si) puede realizarse en un tiempo polinómico. La propuesta parece poco razonable, dado que, por ejemplo, si decidir un proble-

ma establecido con n símbolos requiere n^{100} pasos, el algoritmo difícilmente podrá considerarse «factible». El problema de hallar una noción precisa satisfactoria de computación factible supone, desde luego, un reto. De ahí que tengamos aquí un caso que arroja algunas dudas acerca de la creencia gödeliana de que la noción precisa está ahí desde el principio, pero que hasta ahora no hemos hallado la perspectiva correcta a través de la cual verla claramente.

La breve nota de G de 1936 (véase el capítulo 3, epígrafe *1935*) muestra que los teoremas que tienen en un sistema dado demostraciones largas pueden ser objeto de demostraciones mucho más cortas en extensiones del mismo. La idea ha sido aplicada en la ciencia de la computación para probar ciertos conocidos procedimientos de decisión que no son eficaces por requerir un tiempo exponencial (o peor que eso) de ejecución (véase *CW*, pp. 394-397). Este no es sino un caso especial de la idea general favorita de G: la idea de que en lo que respecta a problemas que surgen en un sistema dado, es más lo que se puede lograr acerca de ellos en un sistema más rico (véase, por ej., la famosa nota 48a de su ensayo famoso, *FG*, p. 610). D. R. Hofstadter considera útiles para el estudio de la inteligencia artificial las construcciones hechas por G en la famosa prueba y coloca en el centro esta idea: «La prueba de Gödel ofrece la idea de que una consideración de nivel superior de un sistema puede contener cierto poder explicativo que esté simplemente ausente en los niveles inferiores» (*op. cit.*, p. 707).

Conviene mencionar que Turing, a diferencia de G, hizo también importantes contribuciones al desarrollo de los computadores, especialmente en los años cuarenta. Las contribuciones de Turing y v. Neumann se hallan recogidas en el trabajo en preparación de Martin Davis «Mathematical logic and the origin of modern computers». (A comienzos de la década de los cincuenta yo introduje una reformulación «en la programación» de las máquinas de Turing que es más afín a los computadores comunes y que probaba que se puede prescindir del «borrado»: véase mi *Survey*, cap. 6). De hecho, las operaciones de los computadores son tan parecidas a algunas de las consideraciones elementales de la lógica que en los últimos años ha sido frecuente que los lógicos se hayan visto involucrados de uno u otro modo en el estudio de los computadores. Por lo que parece, el propio G no estuvo interesado en el desarrollo de los computadores.

Desde 1936, los progresos más notables en el estudio de los pro-

cedimientos mecánicos teóricos reside no tanto en hallar procedimientos de decisión cuanto en probar la insolubilidad de un amplio abanico de interesantes problemas de decisión: un resumen de los principales resultados de insolubilidad es ofrecido en M. Davis (en *Handbook of Mathematical Logic,* ed. J. Barwise, 1977). Para el tipo de consideración que se hace en este libro, la insolubilidad de (toda clase de) problemas diofánticos (el décimo problema de Hilbert) es un ejemplo representativo, pudiendo ocupar, por ejemplo, el lugar de la amplia clase formada por todas las cuestiones de teoría de números en la consideración de si la mente humana sobrepasa o no a todas las máquinas (como ocurre con G en las pp. 324-326 de *MP*).

6.2. **Práctica matemática**

Los problemas insolubles y las proposiciones de indecidibilidad de G pueden verse como una parte de las sorprendentes pruebas de imposibilidad que aparecen en la tradición matemática: el descubrimiento griego de que $\sqrt{2}$ no es un número racional, los descubrimientos del siglo XIX de que no es posible resolver una ecuación de quinto grado por medio de radicales, de que e y π no son números algebraicos, de que no es posible trisecar un ángulo cualquiera con una regla y un compás, de que el axioma de las paralelas no es deducible de los otros axiomas de Euclides, de que los números reales no son denumerables, etc. Al mismo tiempo, las nociones de procedimiento mecánico arbitrario y sistema formal son más generales y dan más sensación de finalidad en el sentido de que no tenemos nociones claras de cómo ir más allá que sean comparables, por ejemplo, a la extensión del dominio de números que abarca de los racionales a los algebraicos. La generalidad de tales conceptos le recuerda a uno el concepto kantiano de toda experiencia posible y sus especulaciones acerca de sus límites.

En la conclusión de sus *Grundlagen der Geometrie* (1899), Hilbert relaciona las pruebas de imposibilidad con la recomendación más general de que se dedique atención, como él hace en el libro, a qué métodos se necesitan para resolver una cuestión determinada. Sus observaciones, que también son relevantes para ciertas cuestiones generales, merecen una extensa cita.

> La obra anterior constituye una investigación crítica de los principios

de la geometría; en esta investigación hemos tomado como guía el principio fundamental siguiente: analizar cada cuestión de tal forma que al mismo tiempo examinemos si es o no posible responder a ella siguiendo un curso preestablecido mediante el empleo de ciertos medios limitados. Esta regla fundamental me parece que contiene una receta general y natural. De hecho, siempre que en nuestras investigaciones matemáticas encontramos un problema o conjeturamos un teorema, nuestra ansia de conocimiento sólo se satisface cuando logramos una solución completa del problema y una demostración rigurosa del teorema, o cuando vemos las razones de la imposibilidad de éxito y, por ende, de la necesidad de fracaso. Así, en la matemática moderna, la cuestión de la imposibilidad de ciertas soluciones o problemas desempeña un importante papel, y los intentos de responder a estas cuestiones han sido con frecuencia ocasión de descubrimiento de nuevos y fructíferos campos de investigación.

Este principio fundamental, que debemos retener en la mente al considerar los principios de la posibilidad de pruebas se halla también estrechamente conectado con el requisito de la «pureza» de los métodos de prueba, objeto cada vez de mayores recomendaciones por parte de la mayoría de los matemáticos. Este requisito no es básicamente otra cosa que una concepción subjetiva del principio fundamental que acabamos de ofrecer. De hecho, el estudio geométrico precedente busca en general elucidar qué axiomas, hipótesis o medios auxiliares se requieren para probar una verdad geométrica, quedando luego la tarea de juzgar desde el punto de vista elegido qué método de prueba ha de preferirse.

La descripción que Hilbert hace del modo en que se organiza su libro parece coincidir en espíritu con la forma neutral en que G considera los diferentes ámbitos de la matemática reconocidos por finitismo, intuicionismo, clasicismo, etc. En otras palabras, conviene darse cuenta de que existen esos distintos ámbitos (de diferentes grados de certeza) y de que hay puntos de vista y contextos alternativos que determinan la preferencia de un ámbito u otro. Por otro lado, el consejo de prestar atención a los modos de probar un teorema o de resolver un problema no se halla en colisión con el impulso natural de tratar primero de solucionar la cuestión por cualesquier método de que se disponga. Es la recomendación de la pureza del método la que parece introducir un requisito adicional que resulta más complicado.

Está, en primer lugar, la distinción entre los métodos de descubrimiento y los de prueba empleados de hecho en el producto acabado. El propósito no puede ser objetar a la apelación que uno haga a las intuiciones físicas o geométricas o (como en el caso de G) filo-

sóficas en tanto que ayudas heurísticas para el descubrimiento de una prueba. Por otro lado, en su práctica matemática, Hilbert no niega, desde luego, el uso de poderosos métodos (tales como la teoría cantoriana de conjuntos) para probar teoremas. Ni tampoco negaría que, en general, es un paso más importante dar por primera vez con *alguna* prueba que determinar los métodos empleados u ofrecer una prueba más elemental. Por lo común, los matemáticos están también interesados en hallar una prueba «elemental» de un teorema demostrado en teoría analítica de números, una prueba algebraica para uno probado por métodos geométricos, etc. Un ejemplo más drástico lo constituye la reciente solución al problema de los 4 colores con ayuda de computadores. En este caso, la «impureza» de la prueba es más evidente, y su dependencia de la creencia en las operaciones correctas de un programa de computador viola desde luego la propia sensación matemática de belleza y elegancia. Con todo, es difícil negar que se ha obtenido una solución al problema, y que esto es ya un avance significativo.

Cabría decir que un sistema formal completo es una realización plena del ideal de la «pureza» de método, dado que resuelve todas las cuestiones que pueden expresarse en él y una prueba en él es en principio susceptible de ser comprobada mediante máquinas. ¿Qué podría ser más puro? En este sentido, la CL de G muestra que la lógica elemental es pura. [Pero, como antes he dicho, la prueba de CL (o incluso su enunciado) emplea conjuntos no constructivos y en este sentido no es «pura» (aceptable) conforme al punto de vista finitista.] Pero luego su IA muestra que la aritmética ya no es «pura» en este sentido, o que ningún sistema matemático puede ser «puro» en el sentido de ser a la vez formal y completo. Se sabe, por ejemplo, que existe un sistema formal completo para la adición sola (o para la multiplicación sola), pero sólo porque en él es tan poca cosa lo que puede expresarse que su poder deductivo alcanza al expresivo. En contraposición, la interacción de sistemas formales de nivel inferior y superior revelada por IA se puede considerar como una instancia más del *slogan* «La pureza no basta», cuando tratamos de comprender los dominios más ricos de la experiencia humana.

El ideal de formalización parece perseguir un tipo de homogeneidad (como forma de «pureza») en el confín mismo de la inteligencia. Está muy alejado de la comprensión intuitiva de una prueba y puede que tenga algo que ver con el ansia de una sensación abstracta de seguridad que incluya, por ejemplo, una protección contra

el descuido, dado que en una prueba enteramente formal no falta ningún paso. Pero, además del requisito de la completud, los sistemas formales poseen también esa cualidad de la «pureza mecánica» que, sin embargo, no facilita la búsqueda de métodos más poderosos para probar teoremas.

El 3 de marzo de 1948, G tuvo una conversación con Carnap, de la que se conserva un recuerdo en *CP*. Según G, Leibniz no obtuvo aparentemente un procedimiento de decisión para la matemática. [Esto puede compararse con lo que G dice en su ensayo de 1944: Se necesitarían unos cinco años para que unos científicos selectos desarrollaran el cálculo leibniziano hasta un punto tal que «la humanidad pudiera contar con un tipo nuevo de instrumento capaz de incrementar los poderes de la razón mucho más de lo que cualquier instrumento óptico haya podido incrementar nunca los de la vista» (B, pp. 231-232).] No puede haber procedimiento general de decisión alguno que funcione como una máquina. Pero, conjetura G, tal vez pueda haber alguna otra cosa, que, aunque no totalmente específica, no obstante dé pistas suficientes respecto de lo que hay que hacer. G brinda entonces la idea de iteración transfinita que añade un nuevo axioma que establece que «los axiomas son hasta aquí consistentes». La correlación de los ordinales (infinitos) con los números naturales puede ser establecida de muchos modos. G toma esto como un ejemplo de método, no para decidir pero sí para establecer nuevos axiomas, lo cual no puede ser hecho por una máquina, pero sí indica al matemático lo que debe hacer. (La idea guarda cierto parecido con las «lógicas ordinales» de que habla Turing en su tesis doctoral.)

Dudo que el ejemplo de G sea tan ilustrativo del ideal de procedimiento no mecánico de decisión como algunos de los conocidos progresos de la matemática. Así por ejemplo, la invención del cálculo hizo más fácil y sistemática la solución de muchos problemas. Muchos de nosotros hemos tenido la experiencia de pasar de la geometría (sintética) a la geometría analítica y hemos aplicado problemas de aritmética (tales como hallar las edades de padre e hijo a partir de ciertas relaciones entre sus edades, el número de pollos y conejos de una caja dado el número total de cabezas y patas etc.) al álgebra. En cada uno de esos casos, hallazgos fortuitos parecen ser reemplazados por algún tipo de método sistemático más controlable. Lo que Leibniz persiguió ¿no podría ser acaso un método general de este tipo susceptible de ser aplicado a toda la matemática?

No han tenido mucho éxito las tentativas encaminadas a pasar del IA de G para proposiciones indecidibles especialmente construidas a pruebas indecidibles de proposiciones matemáticas de la variedad común. Paris y Harrington dan cuenta de algún modesto progreso en esta línea (en *Handbook of Mathematical Logic*, ed. J. Barwise, 1977). Dicho de modo más general, IA ha tenido en conjunto poca influencia sobre la práctica matemática. Naturalmente, si (algún sistema formal de) la aritmética hubiera resultado ser completa (y, por ende, decidible), la investigación en teoría de números habría adoptado una forma totalmente distinta. En el caso de CL, lo que se aplica en teoría de modelos, que tiene algunas conexiones con el álgebra, es el teorema de compacidad o finitud relacionado con él. Un conjunto infinito de fórmulas tiene un modelo si cada uno de sus subconjuntos finitos tiene uno. (Dado que tales aplicaciones se ofrecen en los libros de texto estándar, no serán consideradas aquí.) De entre las escasas aplicaciones matemáticas de CS, un ejemplo lo constituye un teorema que dice que todos los grupos que satisfacen una cierta condición W tienen una base libre (para una exposición, véase P. Erkof, *Am. Math. Monthly*, vol. 83, 1976, pp. 775-788).

6.3. Lógica matemática

El puesto central ocupado por la obra de G en el campo de la lógica matemática es demasiado obvio como para requerir amplios comentarios. Así por ejemplo, el tratado estándar de Hilbert y Bernays, *Grundlagen der Mathematik* (vol. 1, 1934 y 1968; vol. 2, 1939 y 1970) puede verse en buena medida como una detallada elaboración de los logros de G CL, IA y su traducción de la teoría clásica de números al sistema intuicionista. El teorema de finitud o compacidad de G ocupa un importante puesto en teoría de modelos. En cuanto a su IA, constituye el núcleo mismo de la teoría de la demostración.

Parece que G dedicó más tiempo (tal vez de 1931 a 1946) a pensar acerca de la teoría de conjuntos que acerca de otras áreas de la lógica matemática, probablemente debido a que suponía un mayor desafío conceptual. Aparte de L (los conjuntos constructibles), logró también resultados de independencia y una prueba de consistencia más general del axioma de elección. En su conferencia de

Princeton de 1946 introdujo la definibilidad ordinal y abogó por el interés de nuevos axiomas de infinitud en la teoría de conjuntos. Durante los últimos veinticinco años sobre todo se han producido amplios desarrollos siguiendo alguna de estas líneas. Como no estoy al corriente del trabajo más reciente, lo único que puedo hacer es mencionar alguno de los progresos más memorables desde una perspectiva limitada y sesgada.

La prueba de independencia de la hipótesis del continuo de Paul H. Cohen (1963) ha sido objeto de mucha atención y ha abierto una vía para el descubrimiento de un buen número de resultados de independencia, tales como la prueba de consistencia de Robert Solovay (con elección dependiente) de la proposición de que todos los conjuntos de números reales son mensurables de Lebesgue (*Annals of Math.*, vol. 92, 1970, pp. 1-56).

En su conferencia de 1946 G afirma, «De hecho, se pueden definir conjuntos e incluso conjuntos de enteros respecto de los que no se pueda probar que sean constructibles» (Davis, p. 86). Es probable que estuviera conjeturando aún más, a saber: empleando cardinales grandes se puede probar que existen conjuntos tales que no son constructibles. Semejante proposición fue probada a comienzos de la década de 1960 por D. Scott y F. Rowbottom para cardinales mensurables, de Ramsey y otros cardinales (véase, por ejemplo, el artículo publicado por Rowbottom en *Annals of Mathematical Logic*, vol. 3, 1971, pp. 1-44). A finales de los sesenta R. B. Jensen empezó a estudiar la «estructura tenue» de L dedicando atención también a segmentos que tienen como índice ordinales que no son cardinales (véase *Annals of Mathematical Logic*, vol. 4, pp. 229-308). Uno de sus destacados resultados fue una prueba de que «la hipótesis de Souslin» es falsa en L.

Dado el hecho de que la teoría más fuerte de conjuntos ya no admite la estructura ordenada L como modelo, Jensen, W. Mitchell y otros empezaron a buscar modelos «L-formes» que preserven algunos de los atractivos rasgos de L. Esto parece sugerir la posibilidad de nociones alternativas de ser L-forme. Recientemente, Jensen me confió la siguiente definición. Un axioma de cardinal grande p se dice que determina [admite] modelos L-formes si, entre los modelos internos transitivos de «ZF más p» que contienen todos los ordinales, hay uno que es máximo en el sentido de que contiene todos los números reales que aparecen en dicho modelo. De algunos resultados modernos de W. Hugh Woodin se sigue que no hay nin-

gún modelo L-forme si p afirma la existencia de un cardinal «superfuerte» que, por consiguiente, establece un límite inalcanzable (e introduce un marco de referencia) para la búsqueda de modelos L-formes.

En la conferencia de 1946 G considera los cardinales grandes en conexión con la búsqueda de alguna noción de demostrabilidad absoluta. Una observación favorita de G es la de que hay proposiciones indecidibles en un sistema dado que se pueden decidir en un sistema superior (o, concretamente, en un estrato superior dentro de la jerarquía de conjuntos). «No es imposible», dice, ampliando esta idea a una conjetura más fuerte de la conferencia, «que toda proposición expresable en teoría de conjuntos sea decidible a partir de los actuales axiomas más alguna aserción verdadera acerca del tamaño del universo de todos los conjuntos» (Davis, p. 85). Esto indica que el principal vehículo para enriquecer la teoría de conjuntos no es sino llegar a nuevos axiomas de infinitud. En concreto, lo que la verdad de esta conjetura implicaría es que el único modo de «ensanchar» la jerarquía estriba en «prolongarla». Aunque la interpretación perseguida en teoría de conjuntos es una jerarquía amplia (gruesa, máxima), L es una reducida (delgada, mínima); el hecho de que deje de ser un modelo de la teoría de conjuntos en presencia de ciertos axiomas fuertes de infinitud constituye una confirmación parcial de la conjetura de G. En cualquier caso, es evidente que la propuesta de G de que se busquen axiomas de infinitud ha llevado a una buena cantidad de variadas investigaciones durante varias décadas. Así por ejemplo, A. Kanamori y M. Magidor han ofrecido un resumen del desarrollo experimentado por los axiomas de cardinal grande en la teoría de conjuntos (*Springer Lecture Notes in Mathematics*, vol. 669, 1978, pp. 99-275).

En su ensayo sobre Cantor (1947) G elabora y especifica su idea acerca de los cardinales grandes (BP, pp. 264-265; para una discusión detallada de este ensayo, véase la sección 11.2). Además de los axiomas de infinitud, G menciona (en la p. 265, primera sentencia completa) otros dos modos posibles de enriquecer la teoría de conjuntos: a) considerando la noción «propiedad de conjunto» (nota 18) y b) formulando alguna propiedad máxima, en contraste con la mínima de L (nota 23). Parece que b) está dentro de la línea que busca ampliar directamente la jerarquía y que a) está relacionado con la idea de G de una teoría de conceptos («propiedades»). Todas estas ideas fueron sugeridas en conexión con la búsqueda de nuevos

modos de decidir CH (la hipótesis de continuo), sobre la base de su correcta y bien fundada conjetura de que no es decidible a partir de los axiomas aceptados. De ahí que parezca una equivocación afirmar que G buscó la solución sólo en nuevos axiomas de infinitud. En concreto, su trabajo sobre «escalas de funciones», realizado en torno a 1970, estaba en una dirección distinta.

Generalmente hoy se cree poco probable que nuevos axiomas de infinitud resuelvan el problema del continuo. En cierto sentido, la conjetura de G sobre CH experimentó un cambio entre 1947 y 1975. Mientras que en 1947 ofreció razones para su creencia de que CH es falsa (BP, pp. 266-268), en 1975 creía que CH puede ser verdadera y que la cardinalidad del continuo es aleph-uno o aleph-dos. Seguía creyendo que la CH generalizada es falsa. Parece que el interés de G en CH se basó en buena medida en su creencia de que su estudio es una útil ayuda en nuestro análisis del concepto de conjunto. En 1947 escribía que «el papel del problema del continuo en teoría de conjuntos habrá de llevar al descubrimiento de nuevos axiomas que hagan posible refutar la conjetura de Cantor» (BP, p. 268). En 1975, probablemente hubiera modificado esta afirmación, sustituyendo «refutar» por «resolver».

Un área de investigación que hoy goza de vitalidad la constituye lo que se conoce con el nombre de «axioma de determinación» (AD), que es enormemente relevante para los axiomas del cardinal grande (CA). La idea estriba en determinar con cuánta fuerza un caso de AD puede producir algún CA y con cuánta fuerza un AD puede producir un caso dado de AD. Un primer ejemplo notable de este tipo de resultado lo constituye la prueba de Martin de la «determinación de Borel», que emplea la jerarquía iterativa hasta el grado omega-uno (*i.e.,* iterando muchas veces la formación de conjuntos potencia a partir, por ejemplo, del conjunto de los números naturales) y que, por un temprano resultado de H. Friedman, no puede emplear mucho menos (véase D. A. Martin, *Annals of Math,* vol. 102, 1975, pp. 363-371). Esta prueba ilustra también bien la observación de G de que la prueba de las proposiciones de nivel inferior puede requerir axiomas de nivel superior. En este caso, el teorema probado versa acerca de conjuntos de números reales y de una proposición de grado 3 (si tomamos las proposiciones acerca de los números naturales como de grado 1), y no obstante, su prueba requiere un segmento de la conocida formulación de la teoría de conjuntos hasta el grado omega-uno.

En los últimos años, se han obtenido impresionantes resultados sobre las relaciones entre CA y AD a través de la obra de Woodin y otros. Dos resultados destacables son 1) si hay ω «cardinales de Woodin», entonces AD vale para conjuntos proyectivos; 2) si hay $\omega + 1$ cardinales de Woodin, entonces AD vale para L[R].

6.4. **La naturaleza de la matemática**

Si miramos a la teoría axiomática ofrecida por Euclides para la geometría desde nuestra perspectiva actual, nos damos cuenta de dos cosas: no es un sistema formal y está abierta a interpretaciones diversas. En el primer aspecto, se distingue de los sistemas formales (elementales o de primer orden) de la aritmética y la teoría de conjuntos, familiares a los lógicos de hoy, que también admiten modelos distintos aunque no de propósito. En el segundo, la teoría euclídea es satisfecha por todo un espectro de modelos que abarca desde el plano no denumerable completo hasta su subconjunto de puntos constructibles a partir de dos puntos con ayuda de regla y compás. También su intención parece ser indefinida; en este sentido, se distingue de la teoría A de Dedekind («la aritmética de segundo orden de Peano»; véase la sección 7.3), que tampoco es un sistema formal. Puede decirse que el desarrollo de la teoría axiomática dentro de la matemática, desde Euclides, pero sobre todo desde principios del siglo XIX, ha estado presidido por la doble meta de hallar sistemas matemáticos que sean a un tiempo formales y categóricos. El teorema de incompletud de G nos dice que no podemos hallar teorías axiomáticas (de gran significación matemática) que satisfagan a la vez ambos requisitos.

El primer ejemplo de formalización logrado en un área de importancia significativa parece que fue el sistema formal construido por Frege para la lógica elemental en su *Begriffsschrift* de 1879. En efecto, su sistema hace posible en principio escribir en él las deducciones prácticamente como si fueran computaciones numéricas. O, en términos de la tecnología actual, se podría decir que su sistema es como un programa de computador. El sistema pretende dar lugar a todas las proposiciones «válidas» y sólo a ellas (o, para decirlo en términos leibnizianos, a las proposiciones verdaderas en todos los mundos posibles. El teorema de completud de G (obtenido exactamente medio siglo después prueba que el sistema de Frege logra este propósito original).

Un sistema como el de Frege o el área determinada por él suele conocerse con el nombre de lógica elemental o de primer orden. En tales sistemas, el «universo del discurso» o las interpretaciones de los predicados (propiedades y relaciones) y funciones, así como las constantes individuales se dejan sin determinar. Los teoremas son verdaderos en todos los mundos posibles en el sentido de que, sea cual sea nuestra opción a la hora de determinar esos componentes, siguen siendo verdaderos bajo dicha determinación o interpretación. De ahí que si, por ejemplo, sólo empleamos una única relación diádica, que tomamos como la relación de pertenencia a una clase, y añadimos a la lógica elemental un conjunto de axiomas formalmente preciso, obtendremos un sistema (o teoría) elemental de teoría de conjuntos, siendo un ejemplo lo que familiarmente (y erróneamente) se conoce con el nombre de el sistema ZF (de Zermelo-Fraenkel). En el caso de la teoría elemental de números, una formulación estándar la constituye el sistema formal Z ofrecido en HBI (p. 380), que no es sino la aproximación formal natural a la teoría no-elemental A de Dedekind. Una aplicación típica del teorema de incompletud de G es que los sistemas formales ZF y Z son incompletos (e incompletables).

Si saltamos de Euclides al siglo XIX, nos encontramos con el espectacular evento del descubrimiento de las geometrías no-euclídeas y con las sorprendentes revelaciones, hechas por M. Pasch y otros, de la existencia de supuestos ocultos en Euclides. En 1899, Hilbert publicó una influyente exposición moderna de Euclides, *Grundlagen der Geometrie,* en la que probaba la consistencia y la completud de la teoría modificada H. La prueba de completud es en cierto modo análoga a la bosquejada en 7.3 para la teoría A de Dedekind de la proposición de que A tiene esencialmente un único modelo, y revela que la teoría H sólo puede construirse como un sistema no elemental. La prueba de consistencia es una prueba relativa que muestra que una contradicción en H produce una contradicción en la teoría R de los números reales, por medio de una traducción de H a R. Hilbert ofreció también en otro sitio una formulación de la teoría R, que no es difícil de extraer de la obra de Dedekind *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Como no parece que tengamos una teoría más básica a la que reducir R, Hilbert buscaba una prueba de consistencia (no relativa) de R.

El carácter no elemental de H y de R es fácil de apreciar si se repara en el axioma central de R que dice que toda «cortadura» (de

Dedekind) determina un número real. En otras palabras, establece que un conjunto limitado *arbitrario* de números reales determina un número real que es su límite superior menor. Mientras que lo que busca la teoría A es la inducción matemática sobre conjuntos arbitrarios de números naturales, lo que busca la R es números reales determinados por conjuntos (limitados) arbitrarios de números reales; en ninguno de los dos casos se indica explícitamente qué son o qué podrían ser tales conjuntos *arbitrarios*. Esta noción de sistemas no elementales o de teorías de segundo orden parece surgir —dicho sea de pasada— de forma del todo espontánea. La teoría axiomática de conjuntos de Zermelo de 1908 contiene también una generalización de la idea de conjuntos arbitrarios (de números naturales o reales de A y R) a lo que él llama «propiedades definidas», que sirven para señalar conjuntos arbitrarios de un dominio dado de objetos (más que sólo los números naturales o sólo los reales) (*FG*, p. 202).

La consideración hecha por Hilbert de la teoría H se acercó más al ideal de un sistema formal e introdujo la búsqueda de pruebas de consistencia y completud de tales sistemas formales. En esencia, lo que hay que hacer con H y con R para lograr sistemas formales es adjuntarles la lógica elemental y restringir sus axiomas fundamentales que exigen conjuntos arbitrarios a conjuntos con propiedades definitorias expresables en el lenguaje de cada una de las dos teorías. Este es en esencia el modo en que el sistema formal Z se relaciona con la teoría A (con la salvedad de que entre los conceptos primitivos de Z se han de incluir la adición y la multiplicación, con objeto de estar seguros de que entre los «conjuntos arbitrarios» figuran al menos los conjuntos claramente aritméticos). Una vez que se dispone de tales sistemas formales, las cuestiones de consistencia y completud se vuelven más precisas, dejando aparte que es natural buscar pruebas de consistencia que sean en cierto sentido más ciertas o más transparentes que los sistemas cuya consistencia pretende probarse. Esta exigencia llevó a Hilbert a establecer el requisito de que las pruebas de consistencia han de ser finitarias (en el sentido de que han de ser ejecutables en algo parecido al sistema formal Z o a algún otro más débil, como por ejemplo la aritmética recursiva primitiva sin cuantificadores).

La obra de Cantor fue continuada por Zermelo y desarrollada por G. Hay una analogía entre la oposición de Kronecker a Cantor y la crítica de Brouwer a la concepción clásica de la matemática,

pero Brouwer se consideraba a sí mismo un kantiano en lo que respecta a su filosofía de la aritmética. Frege analizó minuciosamente las pruebas necesarias para reducir la matemática a la lógica, pero sólo probó algunas propiedades elementales de los números naturales. Peano inventó un simbolismo flexible y expresó en él una amplia colección de teoremas matemáticos, pero sin ofrecer las pruebas. La obra de Frege y de Peano puede decirse que ha sido objeto de combinación y ampliación en los *PM* (publicados, en tres volúmenes de 1910 a 1913), cuyo primer volumen, que fue el más influyente, fue fundamentalmente obra de Russell.

De 1900 a 1910 Russell fue alejándose gradualmente de una postura realista en matemáticas (véase BA, pp. 66-70). En 1907 leyó (el 9 de marzo) un ensayo en el que considera «el método regresivo» de descubrimiento de las premisas (*i.e.*, los axiomas) de la matemática (que se publicó por primera vez en *Essays in Analysis*, ed. de D. Lackey, 1973, pp. 272-282). Según él, «Tendemos a creer en las premisas [axiomas] porque podemos ver que sus consecuencias son verdaderas, en lugar de creer en las consecuencias porque sabemos que las premisas son verdaderas. Pero, la inferencia de premisas a partir de consecuencias es la esencia de la inducción; así pues el método de investigación de los principios de la matemática no es en realidad sino un método inductivo» (pp. 273-274).

Los axiomas de Peano son, según él, «recomendables, no sólo por el hecho de que la aritmética se sigue de ellos, sino también por su evidencia inherente. Estos dos factores juntos hacen tan grande su probabilidad que casi llega a la certeza» (p. 276). El no explica por qué nos parecen tales axiomas inherentemente evidentes, mientras el análisis de Dedekind (tal como se recoge en la sección 7.3) es más convincente. La mezcla de análisis conceptual y método inductivo en la búsqueda de axiomas tampoco queda excluida por la postura realista, como se desprende de la sugerencia hecha por G en el sentido de que se puede tomar una decisión probable a propósito de la verdad de los nuevos axiomas de la teoría de conjuntos inductivamente estudiando su «éxito» (BP, p. 265). En la práctica, Russell también se ocupó en cierto modo de análisis conceptual cuando, de 1903 a 1907, se dedicó a buscar los axiomas para *PM*. Como es natural, Russell tiende a destacar el lado inductivo cuando la evidencia inherente está ausente, como ocurre en el caso de su «axioma de reducibilidad» (consúltese su discusión en la introducción a *PM*, pp. 59-60).

Relacionada con el método inductivo está la idea russelliana del «alcance medio». «Las proposiciones más fáciles de aprehender no son ni muy simples ni muy complejas; están en cierto modo en el medio» (Lackey, *op. cit.*, p. 273). «En matemáticas, las cosas más fáciles y más obvias no son las que aparecen al principio; son cosas que, desde el punto de vista de la deducción lógica, están en cierto modo en el medio» (*Introduction to Mathematical Philosophy,* 1919, p. 2). Simpatizo con esta idea y la considero especialmente relevante para el proyecto de desarrollar una filosofía comprehensiva, ya que, en mi opinión, describe bien un hecho bruto central acerca de la experiencia humana, tal como la conocemos, y puede servir de guía para intentar trazar un mapa del conocimiento humano real. Me parece que si contemplamos la actual búsqueda de una teoría unificada en física, la observación de Russell se compadece muy bien con la situación actual (es decir, la situación en la que lo más «fundamental» es lo menos cierto).

Sin embargo, en el momento en que Russell hacía estas observaciones, éstas iban «contra corriente». Así, por ejemplo, el espíritu es distinto en el análisis de Dedekind de los conceptos de número natural y real, que consideraremos en la sección 7.3. Además, tanto el intuicionismo de Brouwer (tal como se introdujo en su monografía de 1907) como los axiomas de Zermelo para la teoría de conjuntos (1908) se basaron fundamentalmente en el análisis de nuestros conceptos intuitivos de número y de conjunto. El ejemplo más espectacular de gran teoría lo constituyó la teoría general de Einstein, que fue concluida a finales e 1915 y ampliamente difundida en Londres y en Nueva York en noviembre de 1919. El propio Hilbert trabajó en estrecha conexión con Einstein (País, pp. 257-260).

En 1900, Hilbert encabezaba su lista de problemas matemáticos con la hipótesis del continuo y la consistencia del análisis (clásico), y en 1904 bosquejaba (en Heidelberg) un programa encaminado a afianzar los fundamentos de la matemática. Entre 1904 y 1917, se ocupó primero de ecuaciones integrales y después de física. En 1917 nombró ayudante a Bernays y comenzó a desarrollar su teoría de la demostración y el punto de vista finitario, centrándose en los problemas de la consistencia y la completud de los sistemas formales de la aritmética y el análisis. En la década de 1920 él y sus colegas se dedicaron de lleno al desarrollo de la teoría de la demostración.

Hilbert (1862-1943) pasa generalmente por ser el abanderado

del formalismo, como Russell (1872-1970) el del logicismo y Brouwer (1881-1966) el del intuicionismo. Estas tres «escuelas contendientes» se consideran con frecuencia como la plataforma para el desarrollo de la filosofía de la matemática en este siglo. Así por ejemplo, el simposio sobre los fundamentos de la matemática, celebrado en Könisberg en septiembre de 1930, se centró en las tesis de estas tres escuelas tal y como fueron presentadas por sus destacados emisarios v. Neumann, Carnap y Heyting; y BP se abre con los tres ensayos presentados. Relacionada con los debates entre estas tres escuelas está una distinción más objetiva entre tres áreas de la matemática: finitista, intuicionista y clásica.

Tanto los formalistas como los logicistas quieren preservar la matemática clásica, y de hecho Hilbert veía en Russell una especie de camarada. Hilbert, estimulado probablemente por el éxito de la física de Einstein y de la teoría atómica, era optimista respecto de las posibilidades de la teoría de altos vuelos y esperaba afianzar a la matemática clásica mediante pruebas finitarias de consistencia. G demostró que el optimismo era ilusorio. Los logicistas pretendían reducir la matemática a lógica, lo cual equivalía en cierto modo a la necesidad de dar una interpretación que la hiciera transparente. Yo, por ejemplo, he señalado en otro lugar la confusión que preside la inadecuada interpretación ofrecida por Carnap *(BA,* sección 2). Ahora se ve claramente que una interpretación adecuada de la matemática clásica requiere algo parecido a una postura realista. Por otra parte, la matemática intuicionista puede considerarse como una parte esencialmente distinta de la clásica.

En su conferencia de Bolonia de 1928, Hilbert sintetizó su programa en cuatro problemas abiertos, que en líneas generales, son: a) la consistencia de (la teoría de números y) el análisis; b) la consistencia de la teoría de conjuntos; c) la completud de la teoría de números y del análisis; d) la completud de la lógica elemental. El teorema de completud de G daba una respuesta positiva a d), su primer teorema de incompletud respondía negativamente a c) y el segundo hacía lo mismo con a) y con b). (Esta rápida y espectacular respuesta por parte de G y su contexto histórico se describen con detalle en la sección 2.3.) Como antes he mencionado, G subraya la importancia de su postura objetivista para sus descubrimientos.

A primera vista pudiera parecer que, como d) sólo se ocupa de la suficiencia de las deducciones formales, no necesita recurrir a conceptos no constructivos. Pero, como también requiere una co-

nexión con el concepto de validez (o de verdad en todos los mundos posibles), no pudo darse con la prueba aún cuando sus componentes matemáticos eran todos conocidos mucho antes de 1929. G está de acuerdo en que, «matemáticamente, el teorema de completud no es apenas otra cosa que una consecuencia trivial de» un trabajo de Skolem de 1922. «Pero ahora la fácil inferencia arriba mencionada», añade G, «es claramente no finitaria, y lo mismo cualquier otra prueba de completud del cálculo de predicados» *(MP,* pp. 8-9; para una discusión más detallada, véase la sección 10.1).

6.5. **La teoría de la relatividad y el concepto de tiempo**

El 29 de mayo de 1946 Schilpp visitó a Einstein. Bien en esta ocasión, o bien poco después G aceptó escribir un ensayo para el volumen conmemorativo del septuagésimo cumpleaños de Einstein (14 de marzo de 1949). Durante los años siguientes (hasta comienzos de 1951) G dedicó buena parte de su energía a una «digresión» en el campo de la física, dedicando especial atención al problema filosófico fundamental del tiempo. En un principio, el proyectado ensayo iba a titularse «La teoría de la relatividad y Kant». En algún momento G decidió restringir su contribución a un breve artículo filosófico, dejando la parte física y algunas consideraciones filosóficas más amplias para ocuparse de ellas en otros ensayos. El artículo fue entregado en mano a Einstein pocos días antes de su septuagésimo cumpleaños.

Entre los escritos importantes de G sobre el tema figuran los siguientes:

P) «An example of new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation», *Review of Modern Physics,* vol. 21, julio 1949, pp. 447-450.

E) «A remark about the relationship between relativity theory and idealistic philosophy», *Albert Einstein: Philosopher-Scientist,* ed. de P. A. Schilpp, 1949 (hacia finales de año), pp. 557-562.

L) «Rotating universes in general relativity» conferencia impartida el 31 de agosto de 1950 en el Congreso Internacional de Matemáticos, Cambridge, Massachusetts, texto publicado en 1952, en sus *Proceedings,* vol. 1, pp. 175-181. Esta es una continuación de P) que anuncia y bosqueja brevemente el argumento a favor de la existencia de soluciones adicionales a las ecuaciones einsteinianas con universos rotatorios. Una nota de G (es-

crita probablemente en 1970) indica que hay un artículo más completo en el Nachlass.

K) «Algunas observaciones acerca de la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía kantiana», manuscrito no publicado.

Yo he leído los siguientes comentarios sobre esos trabajos:

1. La respuesta de Einstein a E), incluida en el volumen de Schilpp, pp. 687-688.
2. Los comentarios de R. Penrose sobre los tres artículos publicados; en Kreisel, pp. 214-215.
3. David D. Malament, «Time travel» en el universo gödeliano, *PSA*, 1984, vol. 2, copyright 1985 de la Asociación de Filosofía de la Ciencia.
4. Howard Stein, nota introductoria a E), con algunas referencias a una versión de K), de próxima aparición en *CW*, vol. 2.

Según E, la teoría de la relatividad «permite formarse nuevas y sorprendentes ideas acerca de la naturaleza del tiempo, de ese misterioso y aparentemente contradictorio ente que, por otro lado, parece constituir la base de la existencia del mundo y de nuestra propia existencia. El propio punto de partida de la teoría especial de la relatividad estriba en el descubrimiento de una nueva y totalmente asombrosa propiedad del tiempo: la relatividad de la simultaneidad, que en una amplia medida, implica la de la sucesión». Esto parece privar al «lapso de tiempo» de su significado objetivo. «La existencia de materia, sin embargo», prosigue G, distingue a los observadores que «siguen en su movimiento el movimiento medio de la materia». Y en todas las soluciones cosmológicas conocidas (anteriores a la obra de G) «los tiempos locales de estos observadores se unen en un único tiempo cósmico», al que podemos considerar como el «tiempo objetivo».

G pasa luego a sus nuevas soluciones (mundos) establecidas en P, en las que no puede haber tal «tiempo cósmico» y en las que el viaje a través del tiempo es en cierto sentido posible. «A saber, haciendo un viaje de ida y vuelta en un cohete que describa una curva suficientemente amplia, es posible viajar, en esos mundos, a cualquier región del pasado, presente y futuro y regresar, exactamente igual a como en otros mundos es posible viajar a partes distantes del espacio.» En tales mundos, «el lapso de tiempo experimentado puede existir sin un lapso objetivo de tiempo», de suerte que «no puede

darse ninguna razón de por qué hay que asumir un lapso objetivo de tiempo».

G concluye E haciendo dos observaciones acerca del significado físico de sus soluciones: a) Aun cuando las soluciones ofrecidas en P son estacionarias y no producen un desplazamiento hacia el rojo para objetos diferenciados, hay también soluciones rotatorias en expansión (tal como son bosquejadas en L); b) «La mera compatibilidad con las leyes de la naturaleza de los mundos en que no hay ningún tiempo absoluto especificado ni, por consiguiente, ningún lapso objetivo de tiempo, arroja una luz sobre el significado del tiempo también en aquellos mundos en que se *puede* definir un tiempo absoluto.»

En 1. Einstein afirma, «El problema involucrado aquí me perturbó ya en el momento en que estaba construyendo la teoría general de la relatividad, sin que pudiera llegar a clarificarlo. Al margen por completo de la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía idealista o cualquier formulación filosófica de problemas, «una cosa es clara: la distinción entre antes y después es abandonada en las soluciones de G para puntos-mundo que están muy aparte, en un sentido cosmológico. «Será interesante sopesar si habrá o no necesidad de excluir éstas sobre bases físicas.»

Los rasgos distintivos de las soluciones de G a las ecuaciones de Einstein son tres: a) La presencia de curvas temporiformes cerradas, b) la posesión de homogeneidad espacial, mas no de isotropía; c) la rotación de la materia en tales mundos respecto de los marcos inerciales locales (violando una versión del «principio de Mach» que niega la rotación cósmica). Parece que los cosmólogos en ejercicio, que sólo consideran «realistas» aquellas soluciones que son a un tiempo espacialmente homogéneas e isotrópicas, excluyen las soluciones de G apoyándose en bases físicas. G parece haber considerado posible que una de sus soluciones «en expansión» pueda de hecho describir nuestro universo. Penrose afirma en 2 que los tres artículos publicados por G «fueron enormemente originales y, a la larga, muy influyentes»; después describe los diversos modos en que han influido en la investigación física.

La compleja relación entre la física y una formulación filosófica de los problemas queda bien ilustrada en B y K. La relatividad de la simultaneidad depende únicamente de la localización y del movimiento del observador en el espacio-tiempo, de suerte que cada tiempo local es «subjetivo» sólo en un sentido objetivo que no tiene

nada que ver con variaciones determinadas por los estados psicológicos de uno o por una ilusión o forma de nuestra intuición sensorial. Lo que se considera imposible en los universos de G es acomodar los tiempos locales elegidos en un tiempo cósmico. Por otro lado, las curvas temporiformes cerradas desproveen al tiempo de su dirección única y lo hacen comportarse como el espacio. En lugar de un objeto que cambia de A a B, tenemos dos objetos A y B localizados en algún lugar del marco fijo del espacio-tiempo. Igual que en el espacio, podríamos partir de cualquier posición (o punto mundo) hacia cualquier otra; junto con el tiempo, el cambio pierde también su significado. En un universo así, si alguien «regresara en el tiempo» y se matara a sí mismo, entonces parece que tendríamos un absurdo en el desbaratamiento del «marco fijo», ya que entonces estaría vivo y muerto «al mismo tiempo». En E, G arguye que esto es imposible en la práctica (p. 561). Pero parece que la razón es más intrínseca: si semejante solución es verdadera, entonces se sigue que no puede ocurrir «cambio» alguno. Mas, como G está dejando abierta la cuestión de si tales soluciones son verdaderas, el argumento de la imposibilidad práctica es probable que resulte relevante.

La relación con la filosofía idealista (con sus numerosas variantes) es ambigua. Podría decirse, por ejemplo, que las ecuaciones del campo y sus soluciones (incluidas las de G) presuponen todas ellas una concepción realista (o incluso materialista) del mundo físico. G parece tener en la mente más en concreto «la concepción de aquellos filósofos que, como Parménides, Kant y los idealistas modernos, niegan la objetividad del cambio y consideran a éste como una ilusión o una apariencia debida a nuestra forma concreta de percepción» (*ibíd.*, pág. 57). El llega incluso a citar a Kant (*Razón Pura*, A37, B54): «Aquellas afecciones que nos representamos a nosotros mismos como cambios, en seres con otras formas de intuición, darían lugar a una percepción en la que la idea de tiempo, y, por ende, también la de cambio, no ocurrirían.»

Pero el dualismo kantiano es una forma muy peculiar de «idealismo», si es que se lo ve como un caso de idealismo. Por otro lado, el idealismo kantiano en relación con el espacio y el tiempo difiere de la teoría de la relatividad en que afirma que todos los seres humanos ven las mismas propiedades temporales y en que niega el aspecto empírico de la geometría. A diferencia de Kant, G no niega que podamos percibir las cosas como son en sí mismas. Lo que a G

le parece un rasgo común entre la filosofía kantiana y la teoría de la relatividad es la conclusión de que, por todo lo que sabemos, sólo el tiempo y el cambio pueden ser nuestras formas de representación de los aspectos del mundo. Para Kant, nuestra facultad de representación que es intersubjetivamente la misma, no puede alcanzar las cosas en sí mismas. Para la teoría de la relatividad, aunque no hay ninguna barrera impenetrable entre nosotros y las cosas tal como son, las relaciones temporales sólo son completamente definibles a través de nuestra cosmología, la cual puede llevar o no a un tiempo cósmico objetivo que una los tiempos locales de todos los miembros de una clase adecuadamente elegida de observadores. Pero es un poco forzado decir que, en la teoría de la relatividad, cada tiempo local está determinado por la «sensibilidad» o la «forma de la intuición sensorial» de un observador apropiadamente situado.

G. con sus padres y su hermano mayor, Rudolf, circa *1910.*

Adele, circa *1932.* (Cortesía del I.A.S. y la Princeton University Library.)

G., marzo de 1939. (Cortesía del I.A.S. y la Princeton University Library.)

Foto de la boda, Viena, 20 de septiembre de 1938. (Cortesía del I.A.S. y la Princeton University Library.)

Los Gödel, junio de 1940. (Cortesía del I.A.S. y la Princeton University Library.)

Casa de los Gödel, en 145 Linden Lane, Princeton, New Jersey, invierno de 1962. (Cortesía del I.A.S. y la Princeton University Library.)

Marzo de 1972, con Hao Wang. La fotografía fue tomada por O. Morgenstern, cerca del despacho de G. (Cortesía del I.A.S. y la Princeton University Library.)

1 de junio de 1972, en la Rockefeller University; G. está entre A. Hershey y Hao Wang. (Cortesía de Rockefeller University.)

Agosto de 1950, con Albert Einstein, Princeton, New Jersey. La fotografía fue tomada por Richard Arens. (Cortesía del profesor Arens.)

14 de marzo de 1951, recibiendo el Premio Einstein, Princeton, New Jersey, con (de izquierda a derecha) Albert Einstein, Lewis Strauss y Julian Schwinger. La fotografía fue tomada por Alan Richard. (Cortesía del I.A.S. y la Princeton University Library.)

Mayo de 1964, con su madre y Adele, en Einstein Drive, Princeton, New Jersey. La fotografía fue tomada por Rudolf Gödel. (Cortesía del I.A.S. y la Princeton University Library.)

Capítulo 7
GÖDEL Y LA FILOSOFIA

Hay que distinguir entre dos cuestiones: 1) ¿Cuáles son las tesis filosóficas de G? 2) ¿En qué medida son «verdaderas» esas tesis? Para cualquier persona A, la respuesta a estas cuestiones depende naturalmente en gran medida de los datos de que A dispone y de sus propias ideas. En la práctica, es probable que 2 se vea reducido a 2'. ¿En qué medida está A de acuerdo con G? El propio G distingue diferentes grados de certeza y de tentatividad, que también son aplicables a sus propias creencias (filosóficas). Por otro lado, algunas de sus tesis han sido objeto de formulaciones más concretas y de desarrollos más amplios que otras. También tiene en cuenta el hecho de que, como regla general, algunas creencias fuertes se basan en razones que tienen que ver con nuestras circunstancias particulares. Como nos ocurre a la mayoría de nosotros, G no puede dar buenas razones para alguna de sus creencias, pero a diferencia de muchos de nosotros, es consciente de ello. De ahí que la segunda cuestión haya de tomar en consideración la medida en que el propio G considera verdaderas y objetivamente justificadas las diferentes partes de sus tesis. Las diferentes medidas se reflejan en parte en lo dispuesto que estuvo a hacer públicas unas u otras de sus tesis.

Entre los lugares donde se recogen las tesis de G figuran sus propias publicaciones, los informes que otros han hecho de sus afirmaciones, y sus obras sin publicar. Naturalmente, su mente albergó

muchas más cosas de las contenidas aquí. En el curso de la elaboración de este libro he tropezado a menudo con cuestiones que me hubiera gustado preguntarle. Al no ser ello posible, cabe esperar poder hallar algunas clarificaciones de lo que pensaba sobre ciertas cuestiones concretas en sus obras no publicadas. La mayoría de ellas siguen estando, sin embargo, en una forma que no facilita el acceso. Hay varias tentadoras direcciones siguiendo las cuales futuros estudios de las mismas tal vez puedan revelar cosas nuevas relativas a los dominios de la filosofía, la ciencia, la erudición y la historia de las ideas.

Estas obras están en diferentes niveles de compleción. Buena parte de ellas estriban en notas y recordatorios para uso propio, de suerte que sus propósitos y posturas relativas tal vez no estén claros para los lectores. Es muy probable que no estén aquí las ideas importantes menos articuladas, tanto porque G pudo creer que sería capaz de recordarlas como porque es probable que haya grandes lagunas en sus proyectos filosóficos más ambiciosos. En estos aspectos, sus conversaciones informales pueden complementar en alguna medida sus extensos escritos (no publicados). En cualquier caso, en mi tentativa de responder a las cuestiones que se plantean acerca de sus tesis, restrinjo los datos fundamentalmente al material publicado y a una parte de las conversaciones que mantuvo conmigo. Estas serán recogidas en toda su extensión en *CG*.

7.1. **Realismo conceptual**

Hay diversos componentes en la filosofía de G que no sé cómo encajar entre sí. El aspecto mejor conocido es su «objetivismo» (o «concepción objetivista de la matemática», *MP*, p. 9) y realismo conceptual (o matemático). Existe (potencialmente) un consenso general en la aceptación de una prueba matemática y su conclusión. Este consenso general revela una suerte de objetivismo en matemáticas (su universalidad) que explica y sobrepasa el mero acuerdo intersubjetivo. Esta universalidad es reconocida también por los intuicionistas, con tal de que la prueba emplee únicamente métodos que sean aceptables para ellos. Pero el objetivismo requiere también objetividad entendiendo por tal un concepto de verdad para el que rige la ley del tercero excluido. Para toda proposición, o bien es verdadera o bien lo es su negación. Una posibilidad es reconocer esta

objetividad pero dejar abierta la cuestión de si y en qué sentido hay objetos matemáticos. No obstante, es difícil imaginar cómo se puede pensar objetivamente sin pensar acerca de algo.

El desacuerdo gira más en torno a la naturaleza de tales «objetos». Así por ejemplo, Bernays afirma, en una carta dirigida a mí (de 23 de febrero de 1976), «me siento inclinado a comparar el mundo de los objetos matemáticos y sus relaciones con el mundo de los colores y de sus relaciones, así como con el mundo de las entidades musicales y sus relaciones. En todos estos casos tenemos una objetividad que ha de distinguirse de la que tenemos en la realidad física». Esto puede entenderse como un comentario a propósito de la afirmación de G de que «tenemos algo parecido a una percepción también de objetos de la teoría de conjuntos... también nos *formamos* nuestras ideas de esos objetos basándonos en alguna otra cosa que *es* dada de un modo inmediato» (BP, p. 271). Sin embargo, no tengo claro si ellos creen o no estar en desacuerdo en este punto. Ambos parecen rechazar las tesis de que los objetos matemáticos son meramente nombres o constructos mentales, tesis que, en general, se considera que no se compadecen con la aceptación de la teoría clásica de números.

G admite que existe una diferencia en cuanto a su grado de certeza entre nuestra intuición de números pequeños y la de la totalidad de los números naturales. Pero, cuando pasamos de pequeños a grandes números, y luego a la totalidad de los números naturales, idealizamos. El mantiene que, sin tales idealizaciones, la ciencia (en particular, la teoría de números) sería imposible. Yo diría que, dadas la estabilidad, claridad y precisión de la teoría de números, el objetivismo en relación con la teoría de números se halla justificado sobre la base de «hacer justicia a lo que conocemos». No obstante, no deja de ser también deseable hacer tan evidentes como sea posible las pruebas en dicha teoría. G cree que su interpretación de la teoría intuicionista de números hace más evidentes las pruebas en ella y, si se añade su traducción a ella de la teoría clásica de números, también las pruebas clásicas (consúltese la sección 11.1). Esto brinda un soporte adicional a la creencia de que el objetivismo en lo que a la teoría de números se refiere se halla bien fundado.

G recomienda la estrategia de centrar la atención en la teoría de números cuando se expone el objetivismo, por la razón de que los matemáticos están más familiarizados con ella, que, además, resulta menos controvertida que la teoría de conjuntos. Es, no obstante ar-

bitrario, continúa diciendo, detenerse en la teoría de números (o en la matemática intuicionista o en la teoría predicativa de conjuntos o en el análisis clásico); el curso natural estriba más bien en aceptar toda la teoría de conjuntos (tal como se va desarrollando). Señala también que los dominios situados entre la teoría de números y la teoría de conjuntos se hallan tan íntimamente conectados entre sí que una contradicción en un área es verosímil que afecte a todas las demás. De aquí parece seguirse que, en su teoría, lo que suele tomarse como grandes saltos en relación con los grados de certeza, como es el caso del uso de las definiciones impredicativas y de la introducción de cardinales mensurables, son pequeños comparados con el primer salto infinito a la totalidad de los números naturales.

Aunque G parece hablar de realismo conceptual y de realismo matemático indistintamente, las connotaciones obvias son distintas. El considera la matemática como el estudio de los conjuntos (puros) y la lógica como un dominio más incluyente que estudia los conceptos (puros). Esto indica ya que el realismo conceptual es una postura más fuerte que la del realismo matemático, salvo, quizás, en el sentido metafórico de haberle sido sugerida por su experiencia matemática, aunque abarcando mucho más. En cualquier caso, el realismo conceptual de G va mucho más allá de las matemáticas.

Bernays tiene la sensación de no estar de acuerdo con G en este aspecto. En la misma carta (mencionada hace un momento), dice Bernays, «Un concepto es, por otra parte, algo originariamente concebido (más o menos instintivamente) por un ser mental que tiene impresiones y sensaciones, algo concebido con la finalidad de orientarse y comprender. Una vez que se introducen los conceptos, se producen como resultado relaciones entre ellos». G afirma estar disociando los conceptos de su tradicional asociación con la psicología. De ahí que pueda parecer que la cuestión es en parte terminológica. G dice, con todo, cosas acerca de los conceptos que son muy distintas y hasta posiblemente contrarias a lo que Bernays cree.

La única exposición publicada de las tesis de G sobre los conceptos, es, hasta donde se me alcanza, la ofrecida en la sección 3.1. de *MP* (pp. 84-86, esp. p. 85). También habló de este tema en sus conversaciones conmigo. Trataré de distinguir diversos aspectos de sus ideas (su «teoría primitiva») sobre los conceptos, tema que parece ocupar un lugar central en (la parte más desarrollada de) su filosofía.

G habla desde luego de intuición en un sentido que no es sino una amplia extensión de la noción kantiana de Anschauung, que está vinculada a las impresiones sensoriales. Suscribo esta extensión y creo que está próxima al uso común. Uno ha de liberarse naturalmente de las asociaciones implícitas (ampliamente extendidas entre los filósofos) de la intuición con la certeza, la finalidad, etc. (consúltese *BA*, p. 20). Pero, además, G introduce la correspondiente extensión del concepto de percepción. Habla de percibir conceptos (por ejemplo, el de procedimiento mecánico desde la perspectiva correcta; véase *MP*, p. 85), y recomienda, al hablar de la percepción de conjuntos, «confianza en este tipo de percepción, *i.e.*, en la intuición matemática» (BP, p. 272). Esta extensión me parece que hace alguna violencia al uso común. La razón que G da para esta extensión es su creencia en que tanto conceptos como conjuntos «pueden representar también un aspecto de la realidad objetiva» (BP, p. 272). También me parece atractiva esta idea. Pero como G reconoce, la dialéctica de intuiciones e idealizaciones extiende el ámbito de lo que podemos percibir (en su sentido) mucho más allá y vuelve mucho menos directa la conexión entre ellas y la realidad objetiva. En concreto, hay distintos grados de certeza en nuestras percepciones e intuiciones de los conceptos, lo mismo que en nuestras creencias acerca de ellos.

G «conjetura que se requiere algún órgano físico que haga posible el trato con impresiones abstractas (en tanto que contrapuestas a las sensoriales), ya que tenemos alguna dificultad en el trato con impresiones abstractas que se remedia considerándolas en comparación con o a la vez que las impresiones sensoriales» (*MP*, p. 85). Distingo dos componentes relacionados en esta afirmación: el hecho de que dominamos impresiones abstractas relativamente bien, y el hecho de que lo hacemos aún mejor cuando impresiones sensoriales y abstractas se consideran juntas. G parece insinuar que ambos hechos serían misteriosos si no hubiera algún órgano físico. Luego pasa a afirmar, «Semejante órgano sensorial debe estar estrechamente relacionado con el centro neural del lenguaje. Lo que ocurre simplemente es que, por el momento, no sabemos lo suficiente, y la teoría primitiva acerca de tales cuestiones, en su estado actual, se presta a ser comparada con la teoría atómica, tal como fue formulada por Demócrito». Estamos ante un importante tema de investigación para la neurofisiología que, sin embargo, está todavía, según G, muy lejos de las potencialidades actuales. Sería interesante

conocer qué tareas viables de investigación pueden extraerse, si es que puede extraerse alguna, de esta conjetura de G.

En general, G cree que, para cada concepto intuitivo y vago, «el concepto claro está ahí desde el principio, sólo que, en un primer momento, no lo percibimos con claridad»; de hecho admite «casos en los que mezclamos dos o más conceptos exactos en un concepto intuitivo». Considera varios ejemplos (todos ellos de naturaleza matemática): procedimiento mecánico, sistema formal, velocidad, tamaño (por ejemplo, de una cantidad), continuidad y punto *(MP,* pp. 84-86). Este es el aspecto de las ideas de G sobre los conceptos que me parece más enrevesado. Su concepción me parece que sugiere un ideal que, aunque indudablemente admirable, es inalcanzable en la mayor parte de las áreas de fuera de la matemática (al menos en un futuro previsible). Consideremos los conceptos de ser pobre, normal, racional, bueno, bello, razonable, etc. Es difícil ver cómo podemos hallar, para cada uno de ellos, uno o más conceptos precisos que constituyan «soluciones» que sean *«incuestionablemente* únicas» y tales que «sólo ellas satisfagan ciertos axiomas que, tras una inspección más profunda, hallamos innegablemente implícitos en el concepto que teníamos» *(MP,* p. 85). Para los fines de este libro, la cuestión crucial es la aplicación que G hace de este ideal a su concepción de la naturaleza y los métodos de la filosofía y, en concreto, a su recomendación respecto al mejor modo de hacer hoy filosofía.

G analiza aquellos conceptos eternos (invariables), objetivos y exactos que aprendemos a percibir cada vez más claramente. En la práctica, usamos términos o conceptos intuitivos que son ambiguos o metafóricos, vagos o borrosos, etc. No está claro que cada uno de tales términos o conceptos intuitivos pueda o deba descomponerse en dos o más conceptos exactos. En cualquier caso, este en un complejo e interesante problema que ha sido objeto de nueva y merecida atención. Así por ejemplo, el último Wittgenstein ha sometido a consideración el hecho familiar de un término (el término «juego») que encierra un cúmulo de conceptos conectados entre sí por un «aire de familia».

Es un hecho que nuestros conceptos intuitivos cambian. G considera este hecho como cambios en nuestras percepciones de conceptos fijos. Cabría pensar que de otro modo los conceptos no serían objetivos, pero yo dudo que así sea. Por ejemplo, las situaciones concretas que constituirían las condiciones para que una familia sea

(o se diga que es) pobre varían con los países y los periodos históricos. Pero, en mi opinión, los diferentes conceptos de miseria son o pueden ser, no obstante, objetivos. En cualquier caso, hay o al menos puede haber un supuesto implícito muy fuerte en la recomendación de G de que podemos y debemos tratar siempre de localizar los conceptos exactos de un modo unívoco.

En conexión con esto y con perspectivas generales afines mantenidas por G (su «optimismo racionalista», su ideal husserliano, su idea de una monadología mejor, etc.), creo que G muestra una tendencia a hacer lo que propongo llamar «proyecciones propicias». Se trata de la tendencia a generalizar inductivamente, tomando como base únicamente el aspecto más propicio de los casos conocidos, desde algunas circunstancias especialmente afortunadas a otras situaciones en las que las condiciones son distintas. Es desde luego innegable que en los casos en que se hallan las «soluciones» relativas a un concepto intuitivo importante, el resultado es especialmente gratificante. Lo que se discute y es más complicado es la cuestión práctica de cuándo, dónde y en qué medida es provechoso buscar tales soluciones. En el caso concreto de la filosofía actual, la respuesta concreta depende mucho de un conjunto de factores, muchos de los cuales varían con cada individuo. La respuesta de G no deja de ser excepcional en el mundo de hoy, lo mismo que sus logros. Pero dudo que su respuesta sea la correcta incluso para él mismo.

Lo que comúnmente se conoce con el nombre de «reduccionismo» encierra un fecundo principio heurístico de la investigación biológica actual, pero es menos convincente como postura general o como predicción a largo plazo. Es más dudoso incluso cuando uno coloca la dialéctica de estímulo y respuesta en el centro de la filosofía o se sirve de ella como principal instrumento para comprender los mucho más ricos fenómenos humanos. En contraste con esto, la proyección de G parece tener la protección de su elevado criterio de lo que constituye un buen trabajo, de suerte que hay un menor peligro de cosechar únicamente frutos insignificantes; la cuestión es la viabilidad. Además, él parece perseguir, también en filosofía, no un desarrollo acumulativo, sino algún avance importante a partir del cual otras cosas se resolverán por sí solas o resultarán «una mera cuestión de ingeniería» (por emplear una expresión de ciertos biólogos).

Dado que G no logró alcanzar, según su propia consideración, lo que estaba buscando en filosofía, su trabajo filosófico no puede

ser tomado como un elemento de juicio fuerte en favor de la viabilidad de sus amplios ideales. También establece una contraposición entre la formulación satisfactoria de la filosofía de uno y sus aplicaciones. En su caso, no dio a su juicio con la formulación, pero estuvo aplicando su filosofía tanto en su trabajo como en sus conversaciones conmigo. Las aplicaciones no dejan de ser atractivas, pero, consideradas con imparcialidad, no me parece que sirvan de soporte a la anticipación de G de «filosofía como teoría exacta», la cual, según él, «debe hacer con la metafísica lo mismo que Newton hizo con la física». El «cree que es perfectamente posible que el desarrollo de semejante teoría filosófica se produzca en los próximos cien años o incluso antes» *(MP,* p. 85).

7.2. **Aspectos de la filosofía gödeliana**

La filosofía como teoría exacta puede considerarse como una aplicación específica del realismo conceptual de G. Ha de lograr la perspectiva adecuada para permitir ver con claridad los conceptos metafísicos básicos. Dicho de forma más explícita, G afirma que la tarea estriba en determinar los conceptos primitivos C de la metafísica y en hallar los axiomas A para ellos (tales que sólo C satisfaga A y A esté involucrada en nuestra intuición originaria de C). (Admite que, de cuando en cuando, podemos añadir nuevos axiomas, presumiblemente lo mismo que modificamos la física de Newton.) Este ideal está estrechamente relacionado con otros aspectos de la filosofía de G. Así por ejemplo, afirma que su filosofía concuerda, en líneas generales, con (el sistema metafísico de) la monadología de Leibniz.

No está claro qué es lo que G entiende por metafísica y dice que aún no ha determinado la lista completa de los conceptos primitivos. Menciona (los conceptos de) objeto, concepto, sustancia, causa, y a veces algunos otros. Dada mi falta de familiaridad con (y de interés por) la teología, G apenas me habló de ella, pero me dijo que, para estudiar filosofía, debo de saber algo de teología natural. En su discusión con Carnap (en 1940) hablaba de la deseabilidad de desarrollar una teoría que se ocupe de los conceptos de Dios, alma e ideas (véase 8.1). Yo creo que para G la metafísica incluye probablemente el concepto de Dios (o de mónada central). Pero también parece querer considerar la metafísica separada de la teología.

Como acerca de mi desacuerdo sobre la cuestión de la religión cabe extenderse más, dejaré la consideración de la «metafísica religiosa» para el capítulo siguiente.

En cualquier caso, ahora me parece que la línea a lo largo de la cual pretende G desarrollar la filosofía como teoría exacta es una suerte de monadología. Además, G afirma también que el sentido del mundo es la separación (y su superación) entre hecho y deseo (o, en términos más generales, fuerza). (De entre las amplias sugerencias de G, ésta es la que encuentro más acertada y estimulante.) Ahora considero que esta afirmación constituye una indicación de la idea central de su monadología, aun cuando el concepto de hecho es seguramente un concepto compuesto y, por tanto, no uno primitivo en el sentido de G. Otra de sus afirmaciones es que él es un idealista. Me parece que con esto está aludiendo a su idea leibniziana de que todas las mónadas son mentes y que la materia y las cosas vivas no son sino formas inferiores de mente. En conexión con esto declara que lo importante es lograr la teoría mejor, creyendo al parecer que la construcción idealista es la más prometedora conforme a su criterio. Creo que G valora la obra de Husserl porque en «la puesta entre paréntesis» ve él un prometedor modo de hallar la perspectiva correcta para percibir los conceptos con más claridad.

G defiende también un «optimismo racionalista». La justificación que ofrece de esta actitud apela a 1) «el hecho de que aquellas partes de la matemática que han sido desarrolladas de un modo más sistemático y completo... muestran un notable grado de belleza y perfección». Por consiguiente, 2) no es el caso «que la razón humana sea completamente irracional por el hecho de plantear cuestiones que no puede responder, a la vez que afirma enfáticamente que sólo la razón puede responderlas». De donde se deduce que 3) «no existen cuestiones de teoría de números indecidibles para la mente humana». De ahí que, 4) la mente humana esté por encima de todas las máquinas» (*MP*, pp. 324-325). Naturalmente, una vez que se considera que se ha establecido la superioridad de la mente humana en este aspecto, uno tiende a suponer también su superioridad en otros. En sus conversaciones, G dota (creo que no del todo en serio) al optimismo de mayor contenido por el procedimiento de proyectar directamente desde las partes desarrolladas de la matemática al mundo entero, infiriendo que también es bello y perfecto. Estas proyecciones propicias me parecen un extraño caso de generaliza-

ción inductiva. En concreto, la inferencia de 1 a 2 parece pasar de ciertos éxitos accidentales en áreas muy limitadas a la anticipación de un éxito universal. Por otro lado, tanto 2 como 3 conciernen únicamente a aquella limitada parte de la mente y de la razón que no tiene que ver más que con cuestiones de matemáticas. No tengo claro con qué grado de amplitud pretende G concebir su optimismo. En un sentido amplio, incluye su creencia en la filosofía como una teoría exacta, y mucho más. En un sentido estricto, se limita a las matemáticas. Como el concepto general de optimismo racionalista puede cubrir distintas alternativas, volveré sobre él en el próximo capítulo.

Las categorías básicas de la ontología de G (esto es, las «cosas», o todo lo que hay) son objetos y conceptos. (En mi opinión, sería apropiado añadir una categoría básica de *imágenes,* pues desempeñan un importante papel en la vida y del todo esencial en el arte y la literatura). Los objetos se componen de objetos matemáticos (*i.e.,* de conjuntos «puros») y otros objetos. Los conjuntos se hallan incluidos en cierto sentido en los conceptos porque G conjetura que todo conjunto es la extensión de algún concepto. Los conjuntos son extensiones, en tanto que los conceptos son intensiones.

Según G, un concepto es algo que puede obtenerse a partir de algunos objetos bien definidos por aplicación iterada (incluida la iteración transfinita) de la operación «conjunto de», no algo que se obtenga dividiendo la totalidad de objetos en dos categorías (BP, pp. 262-263). Los conjuntos «puros» son aquellos conjuntos que permanecen cuando todos los objetos que no son conjuntos se dejan de lado; o, en otras palabras, un conjunto puro es algo obtenible de un conjunto vacío por aplicación iterada de la operación «conjunto de». (Consúltese el capítulo 6 de *MP* o la última parte de *BP*2 para una amplia consideración del concepto de conjunto.) Según G, la matemática puede tomarse como el estudio de conjuntos puros.

En contraposición, la lógica es, para G, el estudio de conceptos (puros). En lugar de la relación de pertenencia para conjuntos, tenemos la correspondiente relación de «participación» o de «caer bajo» o de «instanciación» o de «subsunción» para conceptos. Permítaseme decir que una cosa A se subsume bajo un concepto C (o que la relación de subsunción media entre A y C), si C se aplica a A (o A es una instancia de C). Sin embargo, dado que no tenemos una teoría de conceptos tan ampliamente desarrollada como la que poseemos sobre conjuntos, no tenemos una noción clara de concepto

puro como ocurre con el conjunto puro. G parece insinuar que podemos pensar formalmente en una teoría de conceptos si modificamos el conocido lenguaje de la teoría de conjuntos añadiendo la relación de subsunción o tal vez sustituyendo por ésta la relación de pertenencia. Esta ambigüedad se halla relacionada con la conjetura de G de que todo conjunto es la extensión de algún concepto. Si la conjetura es cierta, entonces los dos modos alternativos no son tan distintos. Por motivos de concreción, asumiré la primera alternativa, de forma que la matemática es una parte propia de la lógica. Mi impresión es que las ideas de G sobre la teoría de conceptos (puros) son un tanto rudimentarias. Muchas de sus tentativas observaciones sobre el tema se recogerán en *CG*.

No cabe duda de que G pretende afirmar que la relación entre lógica y conceptos (o el concepto de concepto) es enteramente análoga a la que media entre matemáticas y conjuntos (o el concepto de conjunto). Presumiblemente también quiere afirmar que la relación entre lógica y metafísica es enteramente análoga a la que media entre matemáticas y física. No cabe duda de que estas sugestivas analogías son estimulantes. Pero dado el estado primitivo de la teoría de conceptos tal y como es concebida por G, no estoy ni siquiera seguro de qué toma G como su dominio; aparentemente, los conceptos de sustancia y causa no pertenecen a la lógica, entendida en el sentido de G, pero tengo más dudas sobre si los de posibilidad y necesidad son considerados por él como propios de este dominio (en tanto que conceptos primitivos o definibles). (Siguiendo la sugerencia que acabo de hacer, me gustaría ver también incluido en la lógica algo que pretenda ser lo que pudiéramos llamar la teoría de imágenes puras o la teoría pura de imágenes.) Lo que G denomina, probablemente siguiendo a Leibniz, conceptos (o propiedades) positivos (y negativos) parece introducir un elemento moral. Según G, «ser una propiedad positiva es lógico». De ahí que parezca que el dominio de la lógica incluye para G ciertas consideraciones morales básicas, aun cuando yo no he sacado tal impresión de sus conversaciones conmigo.

Las propiedades positivas son centrales para la demostración ontológica que G ofrece de la existencia de Dios, que al parecer empezó a circular en 1970. Independiente de la cuestión de si los argumentos caen dentro o fuera del dominio de la lógica tal como G la entiende, puede ser interesante reseñar la estructura de su razonamiento.

Axioma 1. (Dicotomía). Una propiedad es positiva sii su negación es negativa.

Axioma 2. (Cierre). Una propiedad es positiva si contiene necesariamente una propiedad positiva.

Teorema 1. Una propiedad positiva es lógicamente consistente *(i.e.,* posiblemente, tiene alguna instancia).

Definición. Algo es Dei-forme sii posee todas las propiedades positivas.

Axioma 3. Ser Dei-forme es una propiedad positiva.

Axioma 4. Ser una propiedad positiva es (lógico, por tanto) necesario.

Definición. Una propiedad P es la esencia de x sii x tiene P y P es necesariamente mínimo.

Teorema 2. Si x es Dei-forme, entonces ser Dei-forme es la esencia de x.

Definición. NE(x): x existe necesariamente si tiene una propiedad esencial.

Axioma 5. Ser NE es Dei-forme.

Teorema 3. Necesariamente hay algún x tal que x es Dei-forme.

He visto algunos análisis no publicados de esta demostración de G. No cabe duda de que serán objeto de consideración por parte de gentes familiarizadas con esta área. Yo me limito sólo a dejar constancia de ella por mor de la completud, pero, dada mi ignorancia del tema, no haré más comentarios sobre ella. Según G, la idea de esta prueba se le ocurrió por primera vez leyendo a Leibniz.

Como antes he adelantado, la lógica considerada como equiparable a la teoría de conjuntos o la idea de lógica de G entendida como una teoría de conceptos (o incluso una lógica que incluya también una teoría de imágenes) suponen un programa consistente en tratar de desarrollar un símil del *Tractatus* de Wittgenstein que confiriera a esta lógica más rica un puesto igual de destacado en él o, para decirlo en otros términos, mantuviera algunos de los atractivos rasgos del puesto ocupado por la muy limitada lógica (del cálculo proposicional) en el sistema del *Tractatus.* Por ejemplo, a uno le gustaría decir que la teoría de conjuntos es verdadera en todos los mundos posibles en el sentido de que al margen de qué otros objetos (además de los conjuntos puros) haya, la teoría de conjuntos (puros) sigue siendo la misma. También sería deseable una afirmación análoga relativa a los conceptos puros.

Hasta ahora me he centrado en aquellos aspectos de la filosofía

de G que son fundamentalmente amplios proyectos inacabados. Lo que mejor se conoce son más bien sus sólidos logros en el área en que ciencia y filosofía se hallan en interacción, especialmente en aquella parte conocida con el nombre de fundamentos de la matemática (y de la filosofía).

Me parece que se puede dar un resumen esquemático del trabajo de toda su vida en términos de su preocupación por conseguir resultados concretos acerca de grandes cuestiones conceptuales. Hablando burdamente, me gustaría dividir su trabajo en tres grupos. En el núcleo de su trabajo le vemos empleando fructíferas ideas heurísticas tomadas de su postura filosófica para llegar a resultados matemáticos básicos que, a su vez, clarifican enormemente ciertas cuestiones conceptuales emparentadas con el empirismo (o mejor con el positivismo) y los esquemas fundacionales prevalecientes. Pero, además, desarrolló también algunas ideas en otras dos direcciones, que propongo denominar proyecciones verticales y digresiones horizontales.

La fascinación ejercida en él, en los tiempos escolares, por la filosofía de Platón y por la teoría de números le llevaron a su realismo matemático, el cual, con ayuda de su aguda penetración y el estímulo del Círculo de Schlick (y, por ende, del programa de Hilbert), dio lugar a sus principales teoremas lógicos en la década que comienza en 1929 (cuando contaba con 23 años). Estos resultados tienen, ante todo, una importancia central para los proyectos de formalización y axiomatización. Sus resultados relacionados con el intuicionismo se dirigen al problema de la evidencia. Aun cuando sus teoremas de incompletud revelan ciertas limitaciones intrínsecas a la formalización, se sintió más impresionado por la capacidad positiva de la axiomatización y optó por emplear una noción más flexible de teoría axiomática, que toma como modelo la física de Newton y puede incluir también la monadología leibniziana, o algún desarrollo de la misma.

Una proyección propicia vertical le llevó a la búsqueda de una teoría axiomática para la metafísica que presumiblemente adopta la forma de una monadología. El objetivo es determinar los conceptos primitivos y hallar sus axiomas, probablemente con ayuda del método husserliano de la «puesta entre paréntesis», a fin de que se puedan definir conceptos compuestos y derivar proposiciones verdaderas acerca de ellos. También buscó (mas no logró) una epifanía (una revelación o iluminación súbita) que le permitiera ver el mundo a

una luz distinta. (En sus conversaciones conmigo, afirmó repetidamente que Platón, Descartes y Husserl habían tenido todos ellos dicha experiencia.) El mucho más limitado, pero menos lejano proyecto de desarrollar una lógica más rica como una teoría de conceptos puros puede considerarse, bien como una proyección moderada independiente, bien como una parte (¿preliminar?) del ambicioso programa.

En cuanto a las digresiones horizontales, entrañan especulaciones más específicas que están, en su mente, conectadas más estrechamente con conjeturas y resultados científicos concretos. Entre los ejemplos publicados figuran sus ideas acerca de 1) mentes y máquinas *(MP,* pp. 324-325), 2) el origen de la vida *(MP,* p. 326) y 3) viaje a través del tiempo (universos rotatorios, en sus tres ensayos de 1949 y 1950, así como en su manuscrito sobre Kant y Einstein). En mi opinión, 3 se puede considerar como una aproximación a la postura leibniziana consistente en afirmar la subjetividad del tiempo y del cambio; el énfasis en Kant cabe suponer que persigue el objetivo de hacer más concretas las consideraciones, ya que Kant hace afirmaciones más explícitas y amplias que Leibniz. En la sección 6.5 se han ofrecido algunos comentarios sobre los ensayos relativos a 3.

En relación con 1, a diferencia de ciertos filósofos ignorantes, G se da cuenta de que su teorema de incompletud no implica por sí mismo que la mente humana esté por encima de todas las máquinas *(MP,* p. 324). Se necesita alguna premisa adicional. G hace tres observaciones a este respecto: a) Es suficiente aceptar lo que él llama «optimismo racionalista». b) Apelando al «hecho de que *la mente, en su uso, no es estática, sino que está en un continuo desarrollo»,* G mantiene que «no hay razón alguna por la que el número de estados mentales no pueda converger al infinito en el curso de su desarrollo». c) Cree también que hay mente separada de la materia y que esto se demostrará «científicamente (tal vez por el hecho de que no hay suficientes células nerviosas para realizar las operaciones observables de la mente)» *(MP,* p. 324-326). Además, G esgrimió en sus conversaciones otro argumento basado en la conjetura de que existe cierta teoría decidible tal que, para cualquier procedimiento de decisión de la misma, hay alguna proposición muy breve cuya decisión requiere una dosis de tiempo considerable. El mantenía que si la conjetura es verdadera, entonces la mente humana que siempre ha tenido la potencialidad de alcanzar una nueva idea (para dar una prueba más

breve), está por encima de todas las máquinas. No soy capaz de ver la fuerza de este nuevo argumento. ¿Por qué habría de ser imposible absorver la nueva idea dentro de un procedimiento de decisión nuevo?

Más en general, G cree que el «mecanicismo biológico... será refutado». Una refutación cree que estribará en un teorema matemático que establezca que la probabilidad de formar un cuerpo humano en tiempos geológicos es (por las leyes de la física, partiendo de una distribución al azar de la «materia») enormemente pequeña *(MP,* p. 326). Su formulación difiere de 2 en que sustituye el más elemental y menos concreto todo de un organismo vivo (la «vida») por el cuerpo humano. Pero es de suponer que también cree que se puede probar un teorema similar si se reemplaza «cuerpo humano» por «organismo vivo». No deja de ser significativo que, en contraste con especulaciones más elaboradas sobre los orígenes de la vida, la conjetura de G no apele a detalles específicos que provean de una guía más concreta para los cálculos o incluso hagan más directamente plausible la conclusión. Esto parece estar relacionado con su preferencia por resultados que cubren amplios ámbitos y con su creencia en que las conclusiones de gran alcance son independientes de los pequeños detalles. [Hay naturalmente una amplia literatura sobre los orígenes de la vida. La que yo he encontrado es: Walter M. Elsasser, *The Physical Foundation of Biology,* 1958, *Atoms and Organism,* 1966 y *The Chief Abstractions of Biology,* 1975; F. H. C. Crick and L. E. Orgel, «Directed panspermia», *Icarus,* vol. 19, 1973, pp. 341-346; y Richard L. Thompson, *Mechanistic and Nonmechanistic Science,* 1981 (especialmente el capítulo 5 y los apéndices 1 y 2).

En la noción de «mecanicismo» se da la conocida ambigüedad entre restringirse a lo mecánico (en el sentido preciso de lo computable o recursivo) y ser materialista. Así por ejemplo, en una conversación con E. Specker (1950) se planteó la cuestión de si las instancias temporales en las que empieza un terremoto forman o no una secuencia recursiva. No está claro para mí que lo observable en el mundo físico sea siempre recursivo (o «mecánico»). Así por ejemplo, en 1971 le pregunté a G si se podría construir una máquina física tal que pueda producir secuencias no recursivas, como consecuencia de las propiedades del material. G me respondió que no, pero no entendí las razones que dio en favor de su conclusión. Una cuestión menos vaga probablemente sea la de si un computador análogo se puede simular mediante otro digital de for-

ma totalmente adecuada (admitiendo probabilidades concretas de error).

En concreto, G reseña dos proposiciones; i) el cerebro funciona básicamente como un computador digital. ii) Las leyes físicas, en sus consecuencias observables, tienen un límite finito de precisión. El cree que i) es muy probable y ii) prácticamente cierto (*MP*, p. 326). No veo ninguna razón convincente para creer que i) sea verdadera y no sé por qué cree G que es muy probable (como no sea tal vez por el deseo de dejar sitio para una mente separada). No estoy seguro de saber lo que con ii) se quiere dar a entender. Así por ejemplo, hace poco se ha probado que se pueden hallar condiciones iniciales computables para la ecuación de ondas de suerte que la solución única, aunque continua, no es computable (M.P. Pour-El and L. Richards, «Noncomputability in analysis and physics», *Advances in Mathematics*, vol. 48, 1983, pp. 44-74; el resultado citado es el teorema 9 que figura en la p. 67). Si consideramos las condiciones iniciales como el input y la solución como el output, tendríamos algo similar a una máquina física con algún output no recursivo; el problema de la «construcción de una máquina así» parece que sería un problema «práctico». Si lo que G entiende por ii) es que sólo las leyes mecánicas son precisas, entonces el resultado que acabamos de citar parece que refutaría ii). Sin embargo, parece que ii) es más plausible que dicha interpretación de ella. Naturalmente, uno se sentiría inclinado a creer que todas las observaciones tienen límites finitos de precisión. Pero entonces parece que ii) no tiene nada que ver con i), mientras que G considera que ii) es un debilitamiento de i) que preserva una parte del contenido de ésta. Tal vez lo que G esté diciendo es que hay un límite finito uniforme de precisión para todas las consecuencias observables de las leyes físicas. Esta interpretación de ii) parece hacerla compatible con la presencia de leyes físicas no-mecánicas y al mismo tiempo conectarla con i) en el sentido de que, por lo que podemos observar del funcionamiento del cerebro, se lo puede tratar como un computador digital.

En lo que resta de este capítulo me extenderé más en el objetivismo (centrado en los números naturales como objetos) y en su relación con la lógica y con la teoría de números (con la verdad aritmética y el concepto de número natural), así como en las implicaciones de la obra de G para la filosofía (y los fundamentos) de la matemática.

7.3. El objetivismo centrado en la teoría de números

A G le impresionó enormemente la absoluta claridad de las proposiciones y pruebas (en teoría de números) acerca de todos los (infinitos) números naturales. Así por ejemplo, a todo el mundo le convence la conocida prueba de que hay, entre los números naturales, un número infinito de números primos. Aun cuando la conjetura de Fermat o de Goldbach no ha sido todavía probada (ni refutada), casi todos los que se dedican al estudio de la teoría de números están firmemente convencidos de que la proposición es verdadera o falsa. Pensamos que tenemos un concepto estable y fijo de verdad aritmética que hace que sea significativa la pregunta de si una proposición de teoría de números es verdadera o no; en otras palabras, tenemos objetividad en la teoría de números y la ley del tercero excluido rige para las proposiciones aritméticas, las cuales versan acerca de los números naturales. Los números naturales son los objetos que estudiamos en teoría de números y no cabe duda de que «existen» en algún sentido del término (en especial, en el más débil y probablemente más natural).

En 1888 R. Dedekind introdujo por primera vez, en su ensayo *Was Sind und Was Sollen die Zahlen?*, lo que se ha denominado axiomas de Peano. En una carta de 27 de febrero de 1890, dirigida a Headmaster Dr. H. Keferstein (de Hamburgo), explicaba cómo había llegado a esos axiomas. (La carta se publicó por primera vez en *JSL*, vol. 22, 1957, pp. 150-151, y se halla recogida en mi *Survey*, pp. 73-74, y en *FG*, pp. 99-103). Dedekind está también interesado en desarrollar la aritmética dentro del marco de una teoría informal de conjuntos; en este sentido su obra había sido anticipada en gran medida por *Begriffsschrift* de Frege (1879). Para nuestros actuales propósitos, es preferible dejar este aspecto en el transfondo y considerar aquellas partes del análisis de Dedekind que dieron lugar a los axiomas de Peano.

En la carta Dedekind dice de su ensayo que estuvo «precedido por y basado en un análisis de la secuencia de los números naturales, tal y como se presenta, por así decir en la práctica, ante la mente. ¿Cuáles son las propiedades fundamentales mutuamente independientes de esta secuencia *N*, *i.e.*, aquellas propiedades que no son deducibles unas de otras y de las que se siguen todas las demás?».

Cuando el problema se plantea de este modo, yo creo que uno se ve forzado a aceptar los siguientes hechos:

1. La secuencia de números *N* es un conjunto de individuos o elementos, que se denominan números.
2. Los elementos de *N* están en cierta relación entre sí. Están en un orden que está determinado, en primer lugar, por el hecho de que a cada número *n* le corresponde un número *n'*, el número que sucede o va a continuación de *n*.
3. Dados distintos números *a, b,* sus sucesores *a', b',* son también distintos.
4. No todo número es un sucesor *n'*. Esto y 3 constituyen la infinitud de *N*.
5. Dicho con mayor precisión, 1 es el único número tal.
6. Estos hechos están todavía lejos de ser adecuados para una caracterización completa de la secuencia de números. Todos ellos son también aplicables a todo conjunto *S* que, además de *N,* contenga también un conjunto *T* de otros elementos arbitrarios *t*. ¿Qué hay que añadir a los hechos anteriores con objeto de excluir de *S* tales intrusos *t* y de restringirnos a *N*?. «Este fue uno de los aspectos más difíciles de mi análisis y su resolución requirió pensar mucho en él.» A lo que a uno le gustaría llegar es a la idea de que *n* pertenece a *N* si podemos conseguirlo a partir de 1 mediante un número finito de pasos que vayan de un número a su sucesor. El resultado final es este: *N* es la intersección de todos los conjuntos *S* que posee las dos propiedades siguientes: i) 1 pertenece a *S* y ii) para todo *k, k'* pertenece a *S* si *k* también. En otras palabras, todo *S* tal contiene a *N*.

De este resumen de la carta de Dedekind se desprende que Dedekind está ofreciendo un *análisis* de *N* o del concepto de número natural. Esta me parece una ilustración sumamente atractiva de lo que G entiende por determinación de los axiomas a través de un análisis del concepto. Los axiomas se pueden establecer desde luego de un modo más explícito:

P1. 1 es un número. Por 5.
P2. El sucesor de un número es un número. Por 2.
P3. Dos números no tienen el mismo sucesor. Por 3.
P4. 1 no es un sucesor. Por 4 y 5.
P5. Para todo conjunto *S,* si i) 1 pertenece a *S* y ii) el sucesor de cada elemento de *S* pertenece a *S,* entonces todos los números pertenecen a *S*. Por 6.

Es relativamente fácil cotejar esto con nuestro concepto intuiti-

vo de número para ver que tales axiomas son verdaderos. ¿Cómo se puede ver que tales axiomas determinan a *N*? Dedekind muestra que dos conjuntos cualesquiera que satisfagan todos esos axiomas (dos modelos cualesquiera del sistema) son «esencialmente» idénticos (en los parágrafos 71 y 132 de su ensayo). Intuitivamente, la idea es muy simple. Correlacionemos los primeros elementos de los dos conjuntos y los sucesores de todo elemento correlacionado. Dado que ambos conjuntos satisfacen P5, ambos quedan agotados de este modo. Este hecho se expresa generalmente diciendo que los axiomas de Peano son «categóricos». De este modo, Dedekind ha captado la «esencia» del concepto de *N*. Lo que es determinado por esos axiomas (llamémosle A) me parece una excelente ilustración de lo que G entiende por teoría axiomática.

Parece entonces natural esperar también que todas las proposiciones verdaderas acerca de *N* sean derivables de los axiomas. A uno le gustaría argüir de este modo. Supongamos que *B* es verdadero pero no demostrable. Podemos ampliar el sistema por dos procedimientos: añadiendo *B* o su negación como nuevo axioma. Pero los modelos para esas dos extensiones consistentes ya no serían esencialmente idénticos, y el sistema original tendría también dos modelos distintos. La situación es, sin embargo, compleja, ya que no hemos especificado el instrumental auxiliar para derivar teoremas de los axiomas. Es más, ni siquiera hemos especificado el lenguaje del sistema de un modo completo, toda vez que no se ha hecho ninguna indicación acerca del dominio de la variable de conjunto *S* de P5 o de qué tipos de conjuntos se consideran. En particular, se plantea el problema de si la proposición *B* anterior es o no expresable en el lenguaje.

La teoría axiomática A no es un sistema formal. Si se la engloba en un sistema formal (tal como el sistema P introducido por G en su famoso ensayo; *FG*, pp. 599-601), su contenido deviene más explícito pero también menos ilimitado. El contraste entre los sistemas formales y el método axiomático (tal como G parece entender ambas cosas) se puede ver como un aspecto fundamental de lo que podríamos llamar la dialéctica de G de lo formal y lo intuitivo. La teoría A es un análogo mucho mejor de la física de Newton que un sistema formal preciso de teoría de números, al que pueden aplicarse los teoremas de incompletud de G. Aunque a G se le conoce más por sus resultados concretos acerca de los límites de la formalización, su interés primordial no está en lo que se ha formalizado sino

en esclarecer nuestras más amplias intuiciones. Desde esta perspectiva, la teoría A supone un avance «filosófico» importante, pues, según G, este no consiste sino en el *análisis* de nuestros conceptos intuitivos. El trabajo adicional de hallar sistemas formales que, en uno u otro sentido, capturen, en mayor o menor medida, las partes más manipulables de los mismos, tiene menos interés filosófico y no tiene el mismo carácter desbrozador que tiene el «análisis».

En concreto, G diría probablemente que tenemos una teoría axiomática del concepto de verdad aritmética (*i.e.*, de las proposiciones verdaderas relativas a *N*). Naturalmente, la teoría A podría ser aceptada por él como una teoría así. En cualquier caso, cree que tenemos un intuitivo concepto de verdad aritmética suficientemente claro, y las exposiciones de esta sección han pretendido ofrecer evidencia en favor de esta creencia. Sus teoremas de incompletud son una consecuencia espectacular de su aplicación de la dialéctica entre el concepto intuitivo de verdad aritmética y el más preciso de demostrabilidad formal, tal como se revela en instancias concretas de sistemas formales. (El considera el análisis de Turing de la noción de computabilidad como una compleción del trabajo por él realizado con objeto de hacer totalmente preciso el concepto de sistema formal.) La dialéctica es especialmente transparente en el proceso de descubrimiento de G. Lo primero que vio es que la verdad aritmética no es definible en aritmética. Luego se dio cuenta de que la demostrabilidad (en un sistema formal) es definible, y construyó una proposición que es verdadera y expresable en el sistema, pero no demostrable en él.

En palabras de G (*MP.* p. 9),

> por último, conviene señalar que el principio heurístico de mi construcción de proposiciones teórico-numéricas indecidibles en los sistemas formales de la matemática es el muy transfinito concepto de «verdad matemática objetiva» en tanto que *opuesto* al de «demostrabilidad». El uso de este concepto transfinito acaba por llevar a su vez a resultados demostrables por procedimientos finitos, e.g., los teoremas generales acerca de la existencia de proposiciones indecidibles en sistemas formales consistentes.

Las consideraciones hechas hasta aquí han versado sobre la objetividad de la verdad aritmética. Generalmente, la «existencia» de objetos matemáticos se considera también como un tópico central en la filosofía de las matemáticas. G parece creer que nadie al que los prejuicios de la época no hayan confundido pone en entredicho

la existencia de conjuntos y números. También parece encontrar más armonioso considerar todos los objetos matemáticos como conjuntos puros, de suerte que, por ejemplo, los números naturales pueden tomarse como ciertos conjuntos finitos puros. Además, le gusta mucho una observación que atribuye a Bernays: el que la flor tenga *cinco* pétalos forma parte de la realidad objetiva igual que el que su color sea *rojo*.

Dedekind alude en su carta, bajo el epígrafe 7, a la existencia de la secuencia *N* de números: «*¿Existe* de hecho tal sistema en el reino de nuestras ideas? Sin una prueba lógica de la existencia siempre quedaría la duda de si tal sistema contiene o no contradicciones internas.» La «prueba lógica» se ofrece en su ensayo (parágrafos 66 y 72; compárese la consideración similar ofrecida en la sección 13 de *Paradoxien des Unendlichen,* 1851, de Bolzano). La idea principal de su prueba es la siguiente: «El reino de mis pensamientos, *i.e.,* la totalidad *S* de cosas que pueden ser objetos de mi pensamiento, es infinito. Pues si por *s* entendemos un elemento de *S,* entonces estará el pensamiento *s'*, que *s* puede ser un objeto de mi pensamiento, que a su vez es un elemento de *S'*. La existencia de algunos elementos iniciales se dice que se desprende del hecho de que «haya elementos en *S* (e.g., mi propio ego) que son distintos de tales» pensamientos (reflexivos) *s'*. Esta interesante idea es hasta cierto punto similar a la conocida práctica consistente en considerar el conjunto vacío como el número 1 y el conjunto unidad o conjunto potencia (o a algún otro conjunto derivado adecuado) como el sucesor del número asignado a un conjunto dado. En cierto modo hay una sensación general de que los números son más esquivos que los conjuntos (y que los pensamientos, en el caso de Dedekind). Así por ejemplo, G habla de los conjuntos como si fueran «cuasi-espaciales»; no estoy seguro de que estuviera dispuesto a decir lo mismo de los números.

En *BA* he prometido decir algo más acerca de mi afirmación de que lo que llamo «empirismo analítico» no hace justicia a lo que sabemos en lógica y en matemáticas —en especial, acerca del concepto de número natural (sección 2, especialmente notas 2 y 21). Esta sección tiene por objeto cumplir en parte con esa promesa. Es difícil ver cómo, desde la perspectiva del empirismo analítico, se podría llegar a comprender adecuadamente la apelación que Dedekind y G hacen a nuestros conceptos intuitivos de número natural y verdad aritmética. Dicha perspectiva parece negar el hecho de que

tenemos estas poderosas y seguras, aunque imprecisas, intuiciones. El centrarse en los números naturales (más bien que en conjuntos o números reales) tiene la ventaja de dejar de lado los desacuerdos básicos con el empirismo analítico de un modo que no toca las más controvertidas cuestiones en torno a las idealizaciones adicionales que están más allá del contacto más directo con las pequeñas cosas finitas. Una salida alternativa sería considerar nuestras intuiciones geométricas, como Platón y Bernays (y yo creo que también Frege, en sus últimos años) parece que prefirieron hacer.

Otro ejemplo destacable lo constituye el análisis de Turing de nuestro concepto intuitivo de procedimiento mecánico. El concepto parece esquivo y difícil de captar, no obstante lo cual Turing fue capaz de ofrecer una definición precisa y razones convincentes de por qué se adecúa a nuestras intuiciones. Ofreció una definición de números «computables», i. e. «números reales cuya expresión como decimal puede calcularse por procedimientos finitos». Para decirlo en sus términos, la tarea de «justificar» su definición sólo puede apelar a nuestra intuición. «Todavía no ha habido ninguna tentativa encaminada a mostrar que los números "computables" incluyen todos los números que espontáneamente consideraríamos como tales. Todos los argumentos que cabe ofrecer resultan ser, fundamentalmente, apelaciones a la intuición, y por ello, insatisfactorios desde el punto de vista matemático. Lo que verdaderamente está en cuestión es "¿Cuáles son los procesos posibles que cabe realizar en la computación de un número?".»

Los «argumentos» se exponen en su ensayo de 1936 (pp. 249-254, especialmente pp. 249-252; recogido en Davis, pp. 135-140); un análisis alternativo se ofrece en *MP* (pp. 90-95). En mi opinión, estas páginas, que no pueden ser reproducidas aquí, constituyen una buena ilustración de lo que se entiende por un análisis de nuestros conceptos intuitivos. El parágrafo de Turing (antes citado) no considera más que la cuestión de si su concepto es suficientemente incluyente. En la descripción de sus máquinas se hace una apelación más directa a nuestra intuición; la descripción subraya que estas máquinas son (están incluidas en lo que se considera como cosas) «mecánicas» de acuerdo con nuestro concepto de procedimiento mecánico (consúltese también, *MP,* pp. 84-85).

G contrapone prueba a intuición. Una prueba puede ser explícita y concluyente porque tiene el apoyo de axiomas y de reglas. En cambio, las intuiciones sólo pueden comunicarse señalando cosas.

Una elegante ilustración de esta distinción se halla en el muy citado artículo de Lewis Carroll, «Lo que la tortuga le dijo a Aquiles» (*Mind,* vol. 4, 1895, pp. 278-280; recogido, por ejemplo, en Hofstadter y R. M. Eaton, *General Logic,* 1931, pp. 43-46). En la narración, la tortuga fue capaz de torturar a Aquiles llevándole a un regreso infinito, a partir de la irreflexiva suposición implícita de que todo puede probarse.

El regreso parte de la «bellísima posición primera» de Euclides y continúa del siguiente modo:

A) Cosas que son iguales a lo mismo son iguales entre sí.
B) Los dos lados de este triángulo son cosas que son iguales a lo mismo.
Z) Los dos lados de este triángulo son iguales entre sí.
C) Si A y B son verdaderas, Z tiene que ser verdadera.
D) Si A y B y C son verdaderas, Z tiene que ser verdadera.
E) Si A y B y C y D son verdaderas, Z tiene que ser verdadera.

Y así sucesivamente.

La solución de este rompecabezas estriba en la observación de que nos detenemos en C porque nuestra intuición lógica nos dice que C es verdadera. Dicho de forma más explícita, podemos expresar las proposiciones A, B y Z de los siguientes modos: A) Si *p,* entonces *q;* B *p;* Z *q.* La forma de C es entonces la regla del *modus ponens,* que no probamos sino que vemos que es verdadera por intuición.

La opción de G de prestar atención, para considerar la naturaleza de la matemática, fundamentalmente a los conjuntos creo que no significa que él valore menos nuestras intuiciones de la aritmética y la geometría. Tal como yo lo veo, sus razones son más bien el deseo 1) de situarse en la perspectiva más homogénea y unificada y 2) de dedicarse a hacer reflexiones sobre conceptos básicos (en este caso, el concepto de conjunto) que son menos fijos, evolucionan más activamente y, por tanto, dejan más lugar para prometedores progresos conceptuales. Esta fue indudablemente la razón principal por la que, tras el descubrimiento de los resultados de indecibilidad, dirigió su atención fundamentalmente hacia la teoría de conjuntos. De hecho, tuvo una experiencia muy gratificante cuando fue capaz de introducir los conjuntos constructibles combinando el concepto no-constructivo (e indeterminado en relación con nuestro conoci-

miento) de ordinal arbitrario con la a todas luces anti-objetivista jerarquía ramificada. El propio G es del todo consciente de la flexibilidad del empleo en esta combinación de un objetivismo en el que cree sinceramente (que no es un pretendido «como si»). Permítaseme tomar de su carta de 7 de diciembre de 1967 la cita siguiente *(MP, p. 9):*

> Pues ¿cómo se puede dar una prueba de consistencia de la hipótesis del continuo por medio de mi modelo transfinito Δ si las pruebas de consistencia tienen que ser finitarias? (Para no aludir al hecho de que desde el punto de vista finitario, una interpretación de la teoría de conjuntos en términos de Δ parece absurda desde el comienzo, ya que se trata de una «interpretación» en términos de algo que en sí mismo no tiene sentido.) El hecho de que semejante interpretación (así como cualquier prueba no finitaria de consistencia lleve a una prueba de consistencia finitaria *relativa* ha pasado aparentemente desapercibido.

En su carta de 3 de marzo de 1968 G elaboró más éste parágrafo. «Volviendo a leer mi carta de 9 de diciembre, veo que el modo que expresar el [anterior parágrafo] tal vez sea demasiado drástico.» Prosigue luego del siguiente modo *(MP,* pp. 9-10):

> Esto ha de entenderse *cum grano salis.* Naturalmente, el punto de vista formalista no hacía *imposibles* las pruebas de consistencia por medio de modelos transfinitos. Sólo los hacía más difíciles de descubrir debido a que en cierto modo no congenian con esta actitud mental. Sin embargo, en lo que concierne especialmente a la hipótesis del continuo, había un especial obstáculo que hacía *realmente prácticamente* imposible que los constructivistas pudieran descubrir mi prueba de consistencia. Se trata del hecho de que la jerarquía ramificada, que se había inventado *expresamente para fines constructivistas,* ha de emplearse de un *modo totalmente no-constructivo.* Una observación similar resulta aplicable al concepto de verdad matemática, pues los formalistas consideraban la demostrabilidad formal como un *análisis* del concepto de verdad matemática y, por consiguiente, no estaban en situación de distinguir entre las dos.

Hay una cuestión histórica a propósito de los conjuntos constructibles representados por *L,* que parece ser relevante para la noción de G de método axiomático. Martin Davis ha señalado que G, la primera vez que los anunció, llamó axioma a la proposición «Todos los conjuntos son constructibles». Dado que más tarde creyó que esta proposición era falsa, ¿quiere esto decir que un axioma

puede ser falso? Según Kreisel, «Conversando con él [G], manifestó que, durante el tiempo en que pensaba que agotaba *todas* las definiciones, de hecho "L" representa "ley"» (Kreisel, p. 203). No sé si en ese tiempo G creía también que todos los conjuntos son definibles. En cualquier caso, el aspecto que yo considero más relevante de este episodio es la flexibilidad adicional (además de la admisión de la posibilidad de descubrir nuevos axiomas) implícita en el concepto de G de método axiomático: Aquello que en un momento dado es tomado por un axioma más tarde puede resultar ser una proposición falsa y, por tanto, no un verdadero «axioma».

Cuando se acepta que los conjuntos son una suerte de objetos (y que hay objetos matemáticos), queda pendiente lo que se llama el «problema del acceso». Tomemos pequeños y simples conjuntos físicos tales como el de los cinco pétalos de la flor que tengo delante o el de los cinco dedos de mi mano izquierda. Las percepciones de estos parecen similares a las de objetos físicos simples como sillas y mesas. Según G, hay una estrecha relación entre el concepto de conjunto y las categorías del entendimiento puro en el sentido kantiano. «A saber, la función de uno y otras es la "síntesis", *i.e.,* la generación de unidades a partir de cosas múltiples (e.g., en Kant, de la idea de *un* objeto a partir de sus diferentes aspectos).» «Pero de aquí no se sigue en modo alguno que los datos de este segundo tipo, por el hecho de no poder asociarse con acciones de ciertas cosas sobre nuestros órganos sensoriales, sean algo puramente subjetivo. Ellos pueden también representar un aspecto de la realidad objetiva, pero, en tanto que opuestos a las sensaciones, su presencia en nosotros puede deberse más bien a otra clase de relación entre nosotros y la realidad» (BP, p. 272). Esta sugerente comparación parece incluir implícitamente una generalización de los conjuntos físicos a los conjuntos puros. Así por ejemplo, si se nos dan cinco conjuntos puros simples, la función de «síntesis» también puede generar un conjunto puro que esté formado por ellos.

Una vez que se acepta que podemos percibir conjuntos simples y pequeños (físicos y puros), el proceso de ampliaciones queda inaugurado en matemáticas. Este proceso es paralelo a lo que se hace en física y en biología cuando pasamos de objetos físicos familiares a galaxias, electrones, quarks, virus, enzimas, ácidos nucleicos, átomos, etc. En todos estos procesos, acudimos a ciertas formas de idealización que proyectan más allá lo que se ha observado, si bien los detalles de cómo vamos adquiriendo mayor dominio y

confianza en las idealizaciones son muy distintos. Las conexiones íntimas entre las idealizaciones de la matemática y las de la física constituyen, desde luego, un hecho importante acerca de nuestro conocimiento. Según Bernays, las descripciones teóricas tienen un carácter «esquemático», y sus estructuras internas son «estructuras idealizadas» (de naturaleza puramente matemática) y no pueden identificarse del todo con la constitución de la naturaleza física. Habla también de una reciprocidad de aproximaciones entre la amplia multiplicidad de determinaciones de los objetos naturales y la perfección y precisión matemáticas de los schemata. (Véase su ensayo, «Concerning rationality», *The Philosophy of Karl Popper,* ed. P. A. Schilpp, 1974, pp. 603 y 605.)

La primera idealización de la matemática y seguramente la más decisiva es el paso de conjuntos puros pequeños (o de números naturales pequeños) a la totalidad (potencial o realmente) infinita de todos los conjuntos puros finitos (o de todos los números naturales). En este sentido, es interesante reconsiderar el tratamiento que Kant hace de la intuición (en su sentido restringido) de los números naturales y las proposiciones aritméticas. Como él no considera más que números pequeños, no se sabe muy bien hasta qué punto sus consideraciones son también aplicables a números grandes o a todos los números. G señala que la teoría kantiana es insuficiente para ocuparse de la totalidad infinita de los números naturales (y no digamos para aproximarse al concepto de verdad aritmética), debido a que Kant no deja lugar para una idealización suficientemente fuerte. Me ha sorprendido gratamente ver recientemente a Charles Parsons expresar una concepción aparentemente similar en su amplia consideración de la infinitud y del concepto kantiano de «posibilidad de experiencia» (publicada inicialmente en 1964, y recogida como ensayo 4 en su *Mathematics in Philosophy,* 1983; véase en pp. 95 y 108). Según Parsons, los límites de la «experiencia posible», cuando a esto se le asigna un significado concreto, «han de ser más estrechos de lo que, para Kant, es la extensión de nuestro conocimiento geométrico del espacio». También cuestiona que la inducción matemática se base en la «forma de nuestra intuición» kantiana.

De estas observaciones se puede deducir que el intento kantiano no sólo no logró hacer justicia a la potencialidad de la matemática, sino ni tan siquiera a la matemática de su tiempo. En otras palabras, él respondió insatisfactoriamente a su atractivamente formulada cuestión: ¿Cómo es posible la matemática? Es por tanto evidente

que su filosofía no permite integrar fuertes idealizaciones como el pleno dominio de los números reales (o de todos los conjuntos de números naturales) y las ulteriores ampliaciones en teoría de conjuntos. (En este sentido, la filosofía de Wittgenstein comulga con el espíritu de la de Kant. ¿Es que algunas importantes heterogeneidades de la experiencia humana es un aspecto del impulso de la filosofía hacia el logro de una perspectiva unificada elegante? Este fenómeno puede tomarse como una instancia de la vaga máxima según la cual «la pureza no es suficiente en filosofía».) En una carta a Russell (véase su *Autobiography*, I, p. 218) fechada el 19 de septiembre de 1911, Cantor decía, «Soy *un acérrimo adversario del Viejo Kant*, que, a mi juicio, ha hecho mucho mal y mucho daño a la filosofía, e incluso a la humanidad». «Nunca entendí cómo ni por qué tanta gente», continuaba Cantor, «ha podido seguir a ese *sofisticado filisteo*, que era *tan mal matemático*». G tampoco sintió simpatía por la filosofía de Kant (ni por la de Wittgenstein).

Tal como yo lo entiendo, para G hay una especie de dialéctica entre nuestras idealizaciones, nuestros pensamientos conceptuales y nuestras intuiciones. «En el proceso de idealización», dice Bernays en algún sitio, «la intuición sugiere conceptos a la vez que el pensamiento conceptual afina la intuición, de suerte que en matemáticas es prácticamente imposible separar los papeles de la intuición y el pensamiento conceptual». A medida que mejoramos nuestra intuición, mediante el pensamiento conceptual y una mayor familiaridad en el uso y (las correcciones del) mal uso, de algunas idealizaciones, estamos preparados para introducir nuevas idealizaciones sugeridas por ellas o por otros factores, y el proceso continúa. La idealización pone también a la intuición en contacto con lo conceptual. Si incurrimos en dificultades (caemos, por ejemplo, en contradicciones), lo que hay que hacer es examinar más cuidadosamente las idealizaciones a fin de determinar si hay malinterpretaciones o si las dificultades son intrínsecas. G parece creer, como generalización inductiva de la historia del pensamiento, que las idealizaciones que han sido lo suficientemente buenas para recibir una atención continuada tienden a ser estables. Un ejemplo notorio lo constituyen las paradojas de la teoría de conjuntos, que tanta atención recibieron a comienzos de siglo. Es una idea hoy aceptada por muchos, entre los que se encuentra, desde luego, G, que no fueron sino un resultado de una malinterpretación del concepto de conjunto.

No estamos seguros de que las idealizaciones fuertes no lleven

alguna vez a contradicciones. Pero tenemos que aprender a distinguir entre certeza (absoluta) y racionalidad, no sólo en las ciencias y en la vida diaria, sino también en matemáticas. Tendemos a aceptar una escala de certeza decreciente en matemáticas como la siguiente: 1) pequeños números; 2) grandes números; 3) la totalidad de los números naturales; 4) la teoría predicativa de conjuntos; 5) definiciones impredicativas y la operación del conjunto-potencia; 6) el axioma de reemplazamientos; y 7) diversos grados con números cardinales más grandes cada vez que están más allá de los números inaccesibles. Es interesante mejorar el grado relativo de certeza de cada una de estas áreas; éste es el problema de la evidencia. Por ejemplo, aunque G cree en la teoría clásica de números, también considera importante su interpretación, más transparente, de la teoría intuicionista de números, y ésta, junto con su traducción de la teoría clásica a la (formalmente más estricta) teoría intuicionista de números, hace también algo más evidentes las pruebas clásicas. Por consiguiente, como las dos clases de teoría de números son equiconsistentes, las diferentes perspectivas sobre 3 implícitas en ellas tienen menos que ver con el grado de certeza (en cuanto a consistencia), pero más con sus distintas interpretaciones de las pruebas. (Véase la sección 11.1.)

En los últimos años la teoría de conjuntos se ha ido haciendo cada vez más especializada, apartándose de los problemas conceptuales generalmente accesibles. Si G fuera hoy joven, es poco probable que decidiera especializarse en teoría de conjuntos. El quiere una filosofía «precisa, pero no técnica» y cree que el conocimiento muy especializado no es relevante para los problemas conceptuales básicos. Pero, independientemente de sus ideas, es dudoso que la teoría de conjuntos más allá de su marco rudimentario sea especialmente pertinente para la filosofía de la matemática o, indirectamente, para la filosofía general como ejemplo de las múltiples direcciones heterogéneas en las que se desarrolla la experiencia humana.

La obra de G ocupa un puesto central en el estudio actual de la filosofía de la matemática, en lo que respecta no sólo a las implicaciones de sus resultados matemáticos, sino también a sus escritos de filosofía publicados, cuya valoración ha ido en aumento. Para dar una idea de este puesto, echemos una rápida ojeada a los contenidos de BP2, nueva edición, con cambios drásticos, de la colección estándar de artículos selectos de filosofía de la matemática publicada

por primera vez en 1964. Consta de cuatro partes: 1) los fundamentos de la matemática; 2) la existencia de objetos matemáticos; 3) la verdad matemática; 4) el concepto de conjunto. Los editores reconocen que 4 «echa por tierra la distinción» entre los items de 1, por una parte, y los de 2 y 3, por la otra (p. 2). La obra de G es sumamente relevante para las cuatro partes, pero las implicaciones de sus resultados matemáticos son de decisiva importancia para 1, y 4 se centra mucho en sus pensamientos, empezando por sus dos artículos (sobre Russell y sobre Cantor) y acabando por el capítulo 6 de *MP,* que debe mucho a discusiones mantenidas con él e incluye contribuciones suyas. (Una continuación de este item con que se cierra BP es el artículo «Large sets», que se recogerá en *CG.)* También cabe señalar que las consideraciones de esta sección tienen directamente que ver con los encabezamientos 2 y 3.

Capítulo 8

AUSEINANDERSETZUNGEN

Correcta o erróneamente yo asocio este vocablo alemán con la idea de establecimiento de puntos mutuos de acuerdo y desacuerdo. En cierto modo, esto es lo que se hace en el capítulo anterior (e.g., bajo lo que llamo proyecciones propicias) y en observaciones diseminadas sobre las conversaciones que tuvo conmigo (de las que se dará cuenta en *CG*). Lo que me gustaría hacer en este capítulo es contraponer las ideas filosóficas de G a las mías propias, a través de comentarios sobre metafísica (religiosa), «optimismo racionalista», y el polisémico concepto de racionalidad (bajo el encabezamiento de «la verdad y el espíritu de la época»).

La verdad e importancia de la obra de G en lógica matemática son universalmente reconocidas. También es un hecho que su éxito sirve de soporte a sus ideas filosóficas, a las que aquél se ha debido en parte, y que su obra tiene ciertas consecuencias filosóficas que también sirven de soporte a sus ideas. Al intentar evaluar la filosofía de G, este hecho introduce un punto de partida objetivo adicional que aporta a las ideas de G la ventaja más o menos única de la credibilidad. Mas lo que es directamente relevante es tan sólo un fragmento un tanto indeterminado de la filosofía de G. Las generalizaciones y proyecciones de ese fragmento tienen que ser examinadas como tales y también contrastadas con la evidencia objetiva que es más independiente del trabajo definitivo de G. Se necesitan con-

sideraciones muy variadas para determinar hasta dónde resulta razonable extender el fragmento de un modo seguro. Así por ejemplo, el segundo teorema de incompletud de G muestra que la consistencia de las «convenciones» es un supuesto demasiado fuerte. Dicho de un modo más general, a mí me parece que una extensión razonable del fragmento incuestionable de las ideas de G ofrece una convincente refutación de lo que llamo «empirismo analítico» (tal como he hecho en la sección 2 de *BA,* pp. 11-26). Pero, para mí, es por ejemplo una proyección propicia irrazonable el extender el fragmento hasta llegar a considerarlo como un fuerte elemento de juicio objetivo en favor de una predisposición a creer en la previsible realización de la filosofía o la metafísica (religiosa) como una teoría exacta (como G afirma en *MP,* p. 85). En mi opinión, el lúcido y profundo conocimiento de G de las matemáticas (y de la física fundamental) proporciona un modelo para atender imaginativamente tanto a los aspectos universales (tales como la interacción entre lo formal y lo intuitivo) como a los rasgos específicos (tales como el puesto central de los conceptos, objetos o imágenes) de distintas áreas básicas de la actividad humana. Yo creo, sin embargo, que los frutos de su conocimiento sólo son fundamentales para una parte importante de la experiencia humana; en mi opinión, la filosofía requiere también una comprensión más directa de muchas otras partes así como encajarlas entre sí.

Este desacuerdo entraña una serie de creencias distintas. Algunas veces G habla, tal vez con un deje de ironía, como si fuéramos libres de optar por cualquier creencia (e.g., en la existencia de Dios) grata a nuestros deseos, con tal de que no sea una imposibilidad lógica demostrable. Con respecto a la realidad social, la recomendación de G es la de centrarse en la comprensión de uno mismo. No deja de haber una buena dosis de verdad en su creencia de que «si uno se entiende a sí mismo totalmente, lo entiende todo». Pero el yo se halla en interacción con la sociedad y una comprensión completa de uno mismo parece ser un límite inalcanzable (especialmente, si el único medio para ello es la reflexión). Este desacuerdo se basa sobre todo en las diferentes preocupaciones centrales (condicionadas en parte por la diferencia de experiencia personal), así como en las diferentes actitudes hacia lo que G gusta de llamar «los prejuicios de la época» (o, para no prejuzgar la cuestión, «el espíritu de la época»).

Como es natural, tanto en uno como en otro caso, entiendo me-

jor las razones de mis preferencias que las de las suyas. Por otro lado, me parece que sus preferencias son más inusuales que las mías. Así por ejemplo, él prefiere volver a Leibniz, en tanto que yo comparto la muy extendida opinión de que tanto Kant como Marx han ido más allá que él abriendo nuevos horizontes en filosofía y de que las cuestiones planteadas por sus ideas son una parte de la experiencia filosófica humana que no se puede olvidar. Si el propósito de la filosofía es describir las cosas como son, la experiencia añadida ha vuelto las cosas distintas de como eran en tiempos de Leibniz. O, para decirlo de otro modo, dado que raramente captamos directamente las sutilezas y dimensiones múltiples del modo de ser de las cosas, la experiencia y percepciones nuevas magnifican ciertas cuestiones y atraen nuestra atención hacia ciertos aspectos descuidados. Mas G parece pensar que Leibniz había considerado todas las cosas realmente importantes y que lo que hace falta es ver dichas cosas con más claridad. Yo tiendo a ver los «prejuicios de la época» como un fenómeno más limitado tanto en el espacio como en el tiempo de lo que G parece considerar.

Esta diferencia guarda relación con las contrapuestas concepciones de la filosofía como la búsqueda de verdades eternas y como el intento de captar la «esencia» del Zeitgeist, así como con la observación tan cara a G de que el problema importante no es la influencia, sino la verdad. Así expresado el asunto, me parece que está claro que la concepción de G es la correcta. Pero, tal y como yo lo veo, nuestra meta, más que la verdad absoluta, sólo puede ser la verdad alcanzable, y la influencia a largo plazo no deja de ser un indicador de la importancia de lo alcanzado, aunque el perseguir conscientemente tal influencia no me parece un buen método. De igual modo, creo que la guía más atractiva y fructífera es un esfuerzo consciente tendente no a captar el Zitgeist, sino a buscar verdades fundamentales alcanzables, esfuerzo que, de tener éxito, revelará algunos aspectos más universales y de más amplio alcance del Zeitgeist.

En mi opinión, la experiencia humana acumulativa, en su cooperación con el pensamiento puro con el fin de desarrollar una filosofía, desempeña un papel más amplio del que G parece asignarle. En especial, es importante a la hora de calcular la viabilidad de los ideales filosóficos. Una estimación racional requiere todo el cuidado que hay que tener haciendo inducciones empíricas amplias y difíciles de controlar. Así por ejemplo, la filosofía como teoría exacta es desde luego un ideal extraordinariamente atractivo, pero, aun te-

niendo en cuenta la particular ventaja de G de contar con una idea más clara de cómo talentos excepcionales pueden conseguir cosas extraordinarias, dudo que su optimista estimación de la viabilidad de la misma sea muy racional. De lo que no cabe dudar, desde luego, es de que una persecución continuada del ideal por su parte, dada su inusual capacidad para detectar los aspectos precisos en contextos imprecisos, pudiera producir frutos que fueran significativos en otros respectos. Una cruda formulación de la diferencia fundamental entre su perspectiva y la mía, expresada con palabras cargadas que nos son familiares, sería esta: El es más bien un idealista y un racionalista (que simpatiza con Platón), mientras que yo soy más bien un materialista y un empirista (que simpatiza con Aristóteles). Pero yo creo que él estaría de acuerdo conmigo en reconocer lo que de un modo vago podría denominarse dialéctica de los dos tipos de perspectiva.

En el último capítulo he comentado las observaciones de G (a propósito de Carnap) sobre el proyecto de una característica universal. En sus conversaciones conmigo, elogia la idea leibniziana de ciencia conforme a la cual la tarea filosófica de analizar conceptos se combina con la científica de usarlos. También habla de un tipo de análisis que conlleva al mismo tiempo un método de demostración de teoremas. Me parece que esto está relacionado con las contrapuestas ideas de Newton y Leibniz sobre la dinámica. En conexión con esto, hay un artículo de Pierre Constabel *The Annus Mirabilis of Sir Isaac Newton 1666-1966,* ed. Robert Palter, 1970, pp. 109-116) con el que yo creo que G congeniaría. En él se señala que «el propio nombre [dinámica] se originó con Leibniz». Según él, en el «método filosófico» de Newton, «la cuestión de saber si la fuerza es o no real, de si es o no una noción primaria, no es que no se plantee formalmente sino que ni surge siquiera» (p. 111). En cambio para Leibniz, «La dinámica se denomina así sólo porque su autor pretende en nombre de la metafísica adentrarse en este campo haciendo de la *dynamis* la idea primaria» (p. 110).

La monadología leibniziana revisada por Christian Wolff estaba más de acuerdo con la física de Newton, pero G cree que, en general, Wolff retrocedió respecto de Leibniz. Yo no sé lo bastante para aventurar una opinión sobre lo prometedora que fuera la concepción leibniziana para la física. Pero, independientemente de esta cuestión, la evidencia empírica tiende a mostrar, me parece a mí, que el empeño por lograr avances científicos fundamentales no for-

ma, en conjunto, parte integrante del esfuerzo de uno por desarrollar una filosofía globalizadora, más que en el sentido de que una comprensión más profunda en un área contribuye a elevar el nivel general de conocimientos de los contenidos más ricos de la experiencia humana. En general, me siento inclinado a considerar a la física existente como una parte de los datos para hacer filosofía, más que a ver el estudio de la física como un componente central de las actividades filosóficas.

Es evidente que la atención a los dominios no mundanos de la matemática y la física constituye el rasgo distintivo de la tradición filosófica europea. Pero la combinación que se da en G de esta preocupación con un interés aparentemente serio por consideraciones hetero-mundanas (o religiosas) es una excepción en este siglo. Para mitigar la tediosa concentración en la estrechez de lo político y lo moral, Confucio asigna un importante papel a la música (entendida en un sentido amplio). La importancia de la poesía y de la pintura (así como su combinación con la caligrafía) desempeña un papel más importante en la vida china tradicional (al menos entre los miembros de la clase culta). Aunque el ideal de libertad y salvación de Chuang Tzu está relacionado con lo no-mundano y lo heteromundano, no se trata tanto de una perspectiva matemática o religiosa afinada cuanto de una actitud artística enriquecida. Después de asimilado el budismo por China, las sectas más respetadas y de mayor éxito (tales como la Ch'an, la Chan o la Zen) se dedican más a sus aplicaciones en la vida diaria y muestran una afinidad con la filosofía de Chuang Tzu. Mientras que yo conservo mi condición de chino en lo que respecta a mi interés por esas materias mundanas, G parece relegarlas a un puesto secundario y no esencial.

En cierta ocasión G me dijo que no hay ninguna prueba de la imposibilidad de la transmigración del alma. Yo le mencioné el ideal chino de lograr la inmortalidad viviendo una buena vida, realizando algunos buenos actos o haciendo alguna buena obra (ideal que, dicho sea de pasada, parece coincidir con la idea expresada por Einstein en *Ideas and Opinionns,* 1954, p. 56 y citada en *BA,* p. 209). A G le parecieron inadecuados estos tipos de inmortalidad. Creo que lo que él quería decir es que, al estar separados del yo individual (de su conciencia), estos sólo son pobres sustitutos de la verdadera inmortalidad. Conforme a lo que yo entiendo por ser racional, creo que las ideas de G sobre esta cuestión son menos racionales que las de la tradición china (y de Einstein).

8.1. **Metafísica religiosa**

En cierta ocasión G me aconsejó estudiar teología (racional) como parte necesaria de una educación filosófica adecuada. Me parece plausible que semejante estudio sea esencial para una comprensión cabal de la historia de la filosofía europea. Por otra parte, es probable que el pelear con las tres cuestiones metafísicas (de Dios, la inmortalidad y el libre albedrío) afecte a la filosofía de uno, con independencia de que la respuesta que se dé sea positiva o negativa. Pero, teniendo en cuenta el hecho de que yo no estoy preocupado por semejantes cuestiones, me parece que sería un tanto artificial o incluso un despropósito por mi parte el cultivar un estado mental así con objeto de acrecentar mi sensibilidad filosófica, sobre todo teniendo en cuenta que, incluso sin esta dimensión, la dosis de experiencia humana que me gustaría poner en orden es ya demasiado amplia. Esta opinión se basa indudablemente en mi condicionada creencia en que tales cuestiones no tienen una importancia básica para lo que quiero hacer. Esta diferencia de puntos de vista entre G y yo me parece que constituye un ejemplo claro de la relevancia del condicionamiento social para la filosofía. Naturalmente, esta relevancia es una relación enormemente compleja que no prueba ninguna forma simple de relatividad.

En efecto, la diferencia puede tener que ver más con sutiles diferencias en nuestra forma de ver la importancia de la experiencia histórica acumulativa y la omnipotencia del análisis filosófico. Los intelectuales de este siglo, incluso aquellos que han crecido en medios más similares a los de G que a los míos, son propensos a mantener sobre estas amplias cuestiones ideas más cercanas a las mías que a las de G. Por poner un ejemplo, admito una especie impersonal de «inmortalidad en las cosas permanentes que creamos en común» (los términos son de Einstein; véase p. 209 de *BA*). Me conformo con dar por sentado y emplear únicamente lo que Kant llama el libre albedrío práctico que «puede probarse a través de la experiencia» (*Razón Pura* A802). No soy capaz de descifrar el misterio de un Dios personal (o de la idea que G tiene de un Dios que es «más que una persona»). Ni siquiera tengo una idea clara del complejo evolutivo de mis valores y creencias que pudiera llegar a ocupar el lugar de lo que los creyentes interpretan, de una gran cantidad de formas distintas, como su fe en la existencia de Dios.

El deseo de que el obrar bien tenga su debida recompensa es un

deseo ampliamente extendido. Pero inferir de semejante deseo la conclusión de que hay un agente que la asegura supone un gran salto. En cierta ocasión, me sorprendió leer en Kant, después de su declaración de que la moralidad no tiene necesidad alguna de Dios, un argumento expresado en un sofisticado lenguaje que no parece establecer nada más que esto. Kant habla de «la idea de un objeto que adopta la condición formal de todos aquellos fines que *debemos* tener (el deber) y la combina con todo lo que está condicionado, y en armonía con el deber, en todos los fines que de hecho tenemos (felicidad proporcionada a la obediencia al deber)» como «la idea del bien más alto del mundo para cuya posibilidad hemos de postular un más alto, moral, sumamente sagrado y omnipotente Ser, que es el único que puede unir los dos elementos de este bien». Luego prosigue, «No obstante (considerada desde el punto de vista práctico) esta idea no es una idea vacía, pues satisface nuestra necesidad natural de pensar en alguna suerte de fin último», etc. (véase el prefacio a *La religión dentro de los límites de la sola razón,* 1793). Es probable que tengamos aquí un ejemplo del tipo de cosa que hizo que Cantor y G no simpatizaran con la obra de Kant.

En 1961 (año en que, según su propia declaración, su salud fue muy mala) G escribió cuatro largas cartas a su madre Marianne (que en este momento tenía 82 años) dándole razones para creer en otra vida. Es probable que con ello intentara reforzar el lado optimista con el fin de consolar a su madre (como Lu Hsun solía enviar a su madre su material de lectura favorito, del que él no tenía una buena idea). Pero el razonamiento contenido en sus cartas es minucioso, aun cuando no sepamos el grado de certeza que G confiere a sus componentes independientes. Desde luego, algunas de las observaciones complementan lo que dice en otros lugares sobre teología y sobre su propia versión de la monadología. Los argumentos básicos parecen componerse de dos pasos: La ciencia muestra que el mundo está racionalmente ordenado; pero sin otra vida, las potencialidades de cada persona y los preparativos en ésta no tienen sentido. No faltan suplementos y ramificaciones en distintas direcciones.

El mundo no es caótico ni arbitrario, sino que, como la ciencia muestra, el mayor orden y regularidad abundan por doquier. El orden es una forma de racionalidad. La ciencia moderna muestra que nuestro mundo con todos sus planetas y estrellas tuvo un comienzo y que lo más probable es que también tenga un fin *(i.e.* que se con-

vierta literalmente en «nada»). ¿Por qué habría de haber pues este único mundo? Dado que venimos a la existencia en este mundo un día sin saber cómo ni desde dónde, lo mismo puede ocurrir y del mismo modo en otro mundo. (Este y el siguiente parágrafo corresponden a la primera de las cartas de G, de 23 de julio.)

Si el mundo está racionalmente ordenado y tiene sentido, entonces tiene que haber otra vida. ¿Qué sentido tendría producir una esencia (el ser humano) que tiene tan amplio abanico de posibilidades (individuales) de desarrollo y cambio en sus relaciones pero a la que nunca se le permite realizar mil de ellas? Esto sería como poner los cimientos de una casa con los mayores esfuerzos y costes y luego dejar que todo se venga de nuevo abajo (consúltense también las observaciones de G en *MP*, pp. 324-325). [Pero si uno cree que no hay otra vida, entonces la conclusión que parece seguirse es la siguiente: Lo racional es planificar una casa más pequeña que uno sea capaz de acabar o, alternativamente, poner los cimientos con la suficiente solidez como para que otros puedan continuar el trabajo o erigir el edificio mediante un esfuerzo cooperativo.]

Aunque el mundo sea en conjunto bello, la gente no exhibe sin embargo esta belleza. [Este parece ser el problema planteado por la madre de G, a cuya respuesta dedica sus cartas de 14 de agosto y 12 de septiembre.] Pero precisamente este hecho podría contener la solución al enigma de por qué hay otro mundo. En contraposición a los seres humanos, los animales y las plantas tienen sólo una capacidad muy limitada de aprender, y las cosas inanimadas ninguna. Sólo una persona puede, a través del aprendizaje, llegar a una existencia mejor, *i.e.*, a una vida con más sentido. Un modo de aprender, y generalmente el único que existe, estriba, sin embargo, en incurrir al principio en errores. La mayor parte del «aprendizaje» tendrá lugar en el otro mundo, a saber, mediante el recuerdo y la comprensión verdaderamente primera de nuestras experiencias en este mundo, las cuales no son, por así decir, más que la materia bruta para el (verdadero) aprendizaje. Si se objetara que no podemos recordar en otro mundo las experiencias de éste, la respuesta sería que muy bien hubiéramos podido nacer con recuerdos latentes de ellas. Por otro lado, se debe dar naturalmente por sentado que nuestra comprensión allí será significativamente mejor que la que tenemos aquí. De suerte que podremos estar también absolutamente seguros de que de todo lo que recordemos hemos tenido realmente experiencia.

[A mí me parece (y creo que la mayor parte de la gente que hoy se plantea estas cuestiones opinan igual) que la tarea de emplear experiencia acumulativa y de mejorar la capacidad de aprendizaje tiene que ver con la interacción entre la sociedad y los individuos en el decurso histórico de la humanidad. Cargar todo el peso sobre cada individuo concebido como una mónada, como G parece hacer, supondría sin duda un ahorro de una gran cantidad de repeticiones inútiles, pero implicaría el tener que recurrir al supuesto enormemente implausible de que hay otra vida en la que el intelecto es cualitativamente superior. Sobre la base de lo que hoy se cree, me parece más racional abrigar la esperanza de que, igual que en épocas geológicas recientes han aparecido seres humanos, en un futuro (probablemente más bien remoto) pueda aparecer una inteligencia superior. Es posible que G atribuya tales creencias a «los prejuicios de la época», pero en este caso me parece que es difícil distinguir entre prejuicios y creencias racionales.]

No sabemos *lo que* somos (en esencia y considerado eternamente). Sin embargo, si uno pudiera por una vez hacerse, con ayuda de métodos científicos de autocontemplación, con una idea suficientemente profunda de sí mismo, lo que probablemente resultaría es que cada uno de nosotros es algo con unas propiedades completamente determinadas. *I.e.,* todo el mundo podría decir de sí mismo o sí misma: De entre todas las esencias posibles, «yo» soy precisamente esta (de tal o cual modo constituida) combinación de propiedades. «Wenn dann aber zu diesen Eigenschaften gehört, dass wir nicht alles gleich richtig machen, sondern vieles erst auf Grund von Erfahrung, so folgt, dass, wenn Gott an unserer stelle Wesen erschaffen hätte, die nichts zu lernen brauchen, diese Wesen eben nicht *wir* wären. D. h. wir würden dann überhaupt nicht existieren.» [G está aquí respondiendo a la pregunta de por qué Dios no ha creado a la gente de tal forma que logren del todo las cosas desde el principio mismo. A mí me parece que lo razonable es decir directamente que, si Dios hubiera hecho eso, nos habríamos convertido en máquinas perfectas (sin nada que aportar), y, por tanto, no existiríamos.] De ahí que no entienda el «so folgt» de G. En cualquier caso, no deja de ser natural suponer, como señala G en una nota a la palabra «brauchen», que tales o casi tales (perfectas) esencias en cierto modo también existen o existirán. La respuesta a la pregunta por «lo que soy», en el sentido usual, sería entonces, soy algo que en sí mismo no tiene propiedades, una especie de percha sobre la que

uno puede colgar cualquier prenda. De todo esto se podrían decir naturalmente muchas más cosas. [Yo encuentro enormemente sugestivo todo el pasaje (de la carta de G de 14 de agosto) independientemente de su motivación teológica. Es un hecho que aprendemos, y que la mayor parte de las veces lo hacemos cometiendo errores. Este hecho es un importante componente de nuestros esfuerzos por superar la separación entre deseo y realidad que, según G, constituye «el sentido del mundo». La vida perdería, también en mi opinión (buena parte de) su sentido si siempre lográramos del todo las cosas.]

G atribuye los prejuicios en contra de la religión, aunque no en las iglesias, mucha más racionalidad de lo que comúnmente se cree, pero nosotros (i. e., la capa media de la humanidad, o por lo menos la mayor parte de la misma) nos hemos visto arrastrados, desde muy jóvenes, a un *prejuicio en su contra* por la escuela, la mísera enseñanza religiosa, los libros y las experiencias.» «E. g., de acuerdo con un dogma católico de lo más elevado, Dios ha creado a la gran mayoría de la humanidad, a saber, a todos menos a los buenos católicos, con el fin exclusivo de enviarlos al infierno para toda la eternidad.» De otro lado, «el noventa por ciento de los filósofos de hoy consideran que su principal tarea no es otra que quitarle a la gente de la cabeza la religión, trabajando con ello por lograr los mismos efectos que las malas iglesias».

G considera las cartas a su madre como «nada más que una presentación intuitiva y una "adaptación" a nuestra forma actual de pensar de ciertas enseñanzas teológicas, predicadas durante doscientos años, mezcladas, sin embargo, con una buena dosis de sinsentido». Responde (en la contundente carta del 6 de octubre) a la idea de su madre de que nuestro entendimiento no puede penetrar en tales materias, y establece su analogía con la situación de Demócrito respecto de la teoría atómica *(MP,* p. 85).

¿Quién hubiera creído hace 3.000 años que se podría determinar lo grandes, pesadas, calientes y lejanas que son las estrellas más lejanas, y que muchas de ellas son 100 veces más grandes que el sol?. O ¿quién hubiera creído que se podrían construir telescopios? Cuando hace 2.500 años se propuso por primera vez la teoría de que los cuerpos están compuestos de átomos, debió de parecer tan fantástica e infundada como muchas de las doctrinas religiosas hoy. En ese momento no había literalmente ni un material observado que hubiera podido llevar al establecimiento de la teoría

atómica; más bien esta emergió enteramente de razones filosóficas. Nada de esto ha impedido a esta teoría estar hoy espléndidamente establecida y convertirse en el fundamento de una muy buena parte de la ciencia.

[Hay preguntas obvias sobre este argumento por analogía. La mayoría de las teorías antiguas no han alcanzado tanta gloria como la teoría atómica. Hay diversas explicaciones plausibles de por qué las doctrinas religiosas aparecieron en la historia no a partir de observaciones objetivas y pensamientos puros. Han estado por todas partes durante mucho tiempo y no han hecho ningún progreso destacable (al menos durante los últimos centenares de años). No ha habido ningún nuevo elemento de juicio que induzca a un nuevo examen de los méritos ocultos de estas doctrinas.]

Desde luego estamos lejos de ser capaces de poder confirmar científicamente la imagen teológica del mundo, pero yo creo que hoy sería ya posible percibir por la pura razón (sin apelar a la fe de ninguna religión) que la concepción teológica del mundo es totalmente compatible con todos los datos conocidos (incluidas las condiciones que prevalecen en nuestra tierra). El famoso filósofo y matemático Leibniz trató ya de hacer esto hace 250 años, y esto es también lo que yo he intentado hacer en mis anteriores cartas. Lo que llamo la concepción teológica del mundo no es sino la idea de que el mundo y todo lo que hay en él tienen sentido y razón de ser, y en especial una gran e incuestionable importancia. De aquí se deduce inmediatamente que nuestra existencia mundana, dado que en sí misma tiene a lo sumo un sentido muy dudoso, sólo puede ser un medio para el fin de otra existencia. La idea de que todo lo que hay en el mundo tiene un sentido [razón] es un calco exacto del principio de que todo tiene una causa, sobre el que se basa toda la ciencia.

[En comparación con el principio de que todo tiene una razón, no cabe duda de que hemos aplicado con más éxito y adquirido una idea más clara del principio de que todo tiene una causa. La cosmovisión teológica de G no es, en mi opinión, sino una de las muchas variantes de una perspectiva optimista. En igualdad de todo lo demás, parece preferible el optimismo al pesimismo. Pero en la práctica, hablamos de «optimismo no realista» en el sector privado, y, en el público, el optimismo ha sido claramente un instrumento de engaño hábilmente empleado por políticos seculares y clericales. El que alguien pueda tener una fe lúcida en algún optimismo, religioso

o de otro tipo, que no dañe a otros, sólo puede ser, o al menos eso parece, una buena cosa. Todo optimismo convincente que se proponga mejorar la condición humana y tenga claras implicaciones respecto de las actividades cotidianas no deja de ser atractivo, pero, por desgracia, también está sujeto a repugnantes abusos. Es necesario y deseable combinar razón y fe: un optimismo racional incita más que inhibe al individuo a ejercer la responsabilidad del pensamiento independiente, lo cual, en conjunto, ha de acrecentar más que aminorar el optimismo. Aunque no puedo asignar a la cosmovisión teológica de G una probabilidad lo bastante alta como para que afecte de algún modo a mi vida, simpatizo con la idea de que la búsqueda de algún optimismo racional constituye una de las más elevadas metas filosóficas, si bien no tengo una idea clara de cómo avanzar hacia ella.]

En *CP* (los papeles de Carnap) se conserva una relación de una discusión mantenida entre G y Carnap (el 13 de noviembre de 1940) sobre la posibilidad de desarrollar una metafísica religiosa. G habla de establecer una teoría exacta con conceptos como «Gott», «Seele», e «Ideen», que normalmente se toman como metafísicos. Ciertas cosas acerca de las observaciones, observa, se siguen de la teoría, pero no agotan su contenido. G cree que la teoría es igual de significativa que la física teórica, que tampoco es traducible a términos observacionales. Carnap considera que tales teorías forman parten de la mitología y afirma que nuestra ciencia hoy puede explicarlo todo, mucho mejor y con más exactitud que esas teorías. A esto G responde que ésta es una cuestión empírica que nadie puede responder por adelantado. Carnap acepta esta réplica pero alega que ningún científico consideraría rentable un intento hecho en esta dirección. G está en desacuerdo y afirma que todo avance decisivo en la ciencia (incluida la física) generalmente sólo es posible a través de un cambio de dirección. Carnap piensa, sin embargo, que semejante cambio de dirección sería desde luego estéril, y afirma que sabemos, por el psicoanálisis y demás, de qué modo la idea de Dios y la teología en general, etc. retroceden a experiencias e imágenes de la infancia. «Eso no lo creo», responde G, «y, en cualquier caso, la cosa se debe intentar». [Cabe suponer que G lo intentó durante las tres décadas siguientes o más. Parece, sin embargo que no logró ningún éxito, como él mismo reconoció. Pero no hay que descartar que alguien pueda hallar entre sus papeles algún informe de los frutos de su trabajo.]

No tengo claro cómo se conectan las opiniones religiosas de G con las demás partes de sus ideas filosóficas. Aun cuando su propósito es hallar los conceptos y axiomas básicos de la metafísica, en la práctica tiene el cuidado de distinguir y explicitar diferentes niveles de certeza. Algunas veces se limita a decir que la existencia de Dios y de otro mundo no han sido refutadas. De ahí que parezca que concede un nivel de certeza muy bajo a su creencia en ellas. Naturalmente, la mayoría de las cosas que afirma en sus publicaciones y conversaciones no emplean (explícitamente) como justificante esta creencia. Por esta razón, así como por la de mi desconocimiento de la interconexión, en general, consideraré sus ideas filosóficas como independientes de las religiosas.

8.2. **Del optimismo racionalista**

El optimismo es una actitud positiva hacia el futuro del mundo. Esto implica una opción última ante la masa total de elementos de juicio que no lleva a conclusiones claras. En el uso del término «optimismo» como una auto-descripción veo una concesión de que no tenemos ninguna justificación racional (salvo en un «segundo nivel») para la opción. En este sentido, no se asemeja al optimismo leibniziano (satirizado en el *Cándido* de Voltaire), que no es sino una consecuencia de su racionalismo. Aunque «el mejor de los mundos posibles» muy bien pudiera ser el peor posible, un optimismo menos extremo y más precavido es posible que sea menos vacuo y más consecuente. Sirve como límite y guía que permite un total respeto por los desagradables, pero «irreducibles y recalcitrantes hechos». [Cuando William James estaba terminando sus *Principles of Psychology,* escribió a su hermano, «Tengo que contrastar toda sentencia en el banco de pruebas de los irreducibles y recalcitrantes hechos».]

El optimismo racionalista indica un optimismo respecto a la capacidad de la razón, optimismo que parece compartido, casi por definición, por todos los racionalistas. Al mismo tiempo, un racionalismo moderado no es preciso que sea considerado por otros como un optimismo; así, por ejemplo, creo que mucha gente no tomaría tal vez el racionalismo de Spinoza por un optimismo. (No obstante, el racionalismo tiende a implicar optimismo, aunque sólo sea porque razón indica acuerdo más que desacuerdo. El idealismo romántico parece ser una forma menos precavida de optimismo que se

vincula a un ideal u otro. Está también el «optimismo americano» del progreso, tan bien formulado por John Dewey.) Dado que hay tantas nociones radicalmente distintas de razón (y de experiencia), cabe la posibilidad de que incluso puntos de vista divergentes se tomen como variantes de optimismo racionalista, concepto que parece englobar, por ejemplo, tanto el marxismo como el empirismo lógico.

La noción que G tiene de optimismo racionalista está dentro de la línea de Leibniz (especialmente, la de su *Monadología*) y de Husserl (especialmente la de sus *Ideas* y *Meditaciones cartesianas*). El comparte la creencia husserliana en la posibilidad de hallar una Filosofía Primera (una filosofía entendida como ciencia rigurosa). Aunque ambos conceden a la idealización un lugar central, G, a diferencia de Husserl, espera también poder obtener para la metafísica una teoría axiomática (no en el estricto sentido de un sistema formal, sino como algo que hay que construir tomando como modelo la física newtoniana; véase *MP*, p. 85). Su aparente diferencia en lo que respecta al énfasis en la subjetividad (Husserl) o en la objetividad (G) no deja de ser significativa, pero es menos drástica que una oposición radical. Ambos emplean un rico concepto de experiencia (tanto externa como interna) para llegar al mundo real, objetivo. Pero el objetivismo de G brinda un modo de solucionar el problema de la intersubjetividad que tan difícil es para Husserl.

G no parece simpatizar con la «Última Obra» de Husserl (*The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, escrita entre 1934 y el verano de 1937, publicada por primera vez en 1954, versión inglesa de D. Carr, 1970) que, generalmente, se considera que añade una dimensión histórica y que, según Merleau Ponty, «rompió tácitamente con la filosofía de las esencias». En el contexto de esta obra, Husserl propone para su consideración una tesis en la sentencia inicial de un fragmento escrito en el verano de 1935 (*The Crisis*, pp. 389-395): *«La filosofía como ciencia*, como ciencia seria, rigurosa, apodícticamente rigurosa —*el sueño se ha acabado.»* Su discusión de esta tesis parece moverse entre su propia concepción y lo que se puede extraer de la historia de la filosofía. El se pregunta (p. 391),

> ¿[Es nuestra meta] una meta que poco a poco, después de la experiencia de milenios, por fin empieza a tener una grandísima probabilidad inductiva de ser inalcanzable? O lo que desde fuera parece un fracaso y en conjunto

de hecho lo es, lleva consigo una cierta evidencia de necesidad y posibilidad práctica, en tanto que evidencia de un éxito imperfecto, unilateral, parcial, pero con todo un éxito de este fracaso?

En respuesta, dice, «El único modo en el que podemos darnos cuenta de esta evidencia es sumergiéndonos en el contenido revitalizado de los sistemas tradicionales; y si penetramos en ellos, les interrogamos, el sentido de la tarea de la filosofía puede resultar más claro».

Conviene destacar que Husserl confina su atención a la historia tan sólo de la filosofía, y sólo de aquellla filosofía que es acorde con su propia concepción de conocimiento universal que concierne a la totalidad del mundo e incluye dentro de sí cuantas ciencias puedan surgir de él como ramificaciones suyas. Su dimensión histórica presupone una autonomía de la filosofía universal, la cual, en su opinión, «aunque sólo una manifestación parcial de la cultura europea», constituye «el cerebro en funcionamiento» (*The Crisis*, p. 290). Además, considera su ideal como el cerebro el funcionamiento no sólo de la cultura europea, sino también de todo el desarrollo humano. De ahí que esté lejos de tomarse en serio la historia en toda su riqueza como guía para filosofar. Más bien él se centra en lo que considera que constituye el núcleo de la cuestión y espera que las demás cosas se resuelvan por sí mismas una vez que se vea que su ideal es alcanzable.

De ahí que el problema sea la probabilidad inductiva de la posibilidad de alcanzar (y con sus «métodos») su ideal de conocimiento universal que se basa en los fundamentos últimos y procede de una manera completamente evidente y autojustificatoria, y con plena conciencia de sí. Muchos encontrarían atractiva esta meta, si fuera alcanzable o siquiera cupiera acercarse a ella en tanto que límite no totalmente alcanzable. Compruebo con simpatía que tanto Husserl como G se dan cuenta de este problema de la probabilidad inductiva. Pero no soy el único en pensar que, una vez que se reconoce este problema, uno está abocado a considerar primero metas más limitadas. Por otro lado, la experiencia parece enseñarnos que el perseguir de hecho un proyecto acarrea más evidencia convincente y asimilable que el hablar de él. En cualquier caso, las extrapolaciones empíricas son claramente elusivas y ambiguas. Así por ejemplo, el argumento inductivo de G en favor de su optimismo racionalista (el parágrafo de *MP* que comienza al principio de la p. 324) parece

seleccionar de entre muchas una generalización (para mí, enormemente improbable), a partir de la experiencia de que la teoría de las ecuaciones diofánticas de segundo grado con dos incógnitas muestra «un asombroso grado de belleza y perfección».

A Husserl le llama más la atención la unilateralidad de la matematización de la naturaleza y busca algo más profundo que la «actitud natural» de los científicos. De ahí que los éxitos evidentes en física y matemáticas no sean (al menos explícitamente) evidencia inductiva de utilidad para su búsqueda. E incluso sus filósofos favoritos a lo sumo apuntan a la viabilidad de su meta, la cual, como él señala, no ha sido alcanzada nunca antes. En comparación con su audaz convicción, no deja de ser más modesto considerar algunos filósofos elegidos como logrados modelos de sus respectivos periodos históricos y preguntarse si sigue siendo posible hoy un logro comparable. Para Husserl, semejante modestia no sería sino una forma de «relativismo» y supondría un abandono de la filosofía. Al excluir la historia en todos sus aspectos menos el muy limitado antes especificado, se esfuerza por lograr más con menos. [En un aspecto importante, tanto él como G emplean más material que los empiristas lógicos; parten de un concepto más rico de experiencia y sus ideas de lógica, distintas en cada uno de ellos, son más incluyentes. Jugando con las palabras, se podría decir que Husserl es un experiencialista (para evitar las asociaciones con el «empirismo») lógico (o transcendental).]

En la tesis antes citada, el propio Husserl parece distinguir en su ideal de filosofía cuatro niveles: a) como ciencia (Wissenschaft); b) como ciencia seria; c) como ciencia rigurosa; d) como ciencia apodícticamente rigurosa. No queda claro si, como parece hacer con frecuencia, quiere aquí significar «Todos (los niveles) o ninguno». El habla de una concepción del mundo como «una especie de fe religiosa personal» y llega a mantener que toda afirmación de que es «totalmente válida para cada ser humano» significaría la posibilidad de conocimiento científico acerca de «lo absoluto» (p. 390). El parece decir, contrariamente a lo que la mayor parte de la gente entiende por filosofía, que una concepción del mundo que no sea totalmente universal no es filosofía. No sé si no está afirmando también alguna otra cosa que yo considero falsa, a saber, que si una concepción del mundo es capaz de avanzar hacia la universalidad, entonces semejante hecho demostraría también la viabilidad de su [de Husserl] forma de enfocar su ideal.

Lo que a mí me parece difícil de aceptar es su frecuente insinuación de que, salvo que podamos lograrlo todo (o al menos un comienzo completamente sólido), no podemos lograr nada en filosofía. En este sentido, el mucho más concreto ideal de G parece menos drástico: «La filosofía en tanto que teoría exacta debe hacer con la metafísica lo mismo que Newton hizo con la física» (*MP*, p. 85). En primer lugar, ni siquiera la teoría newtoniana nos lo dio todo en física, y hemos asistido a sorprendentes desarrollos más allá de ella, y es de esperar que vengan más. En segundo lugar, la teoría newtoniana no estuvo precedida por amplios y conscientes preparativos encaminados a encontrar los «métodos» correctos para un «comienzo». En tercer lugar, la predilección de G ofrece un blanco, un criterio de evaluación del ideal más específicos que los que soy capaz de percibir en las continuas reformulaciones de Husserl. El interés de G en la obra de Husserl probablemente derive de su creencia en que los «métodos» husserlianos desempeñarán un importante papel en la consecución de su meta. No obstante, no he sido capaz de detectar las influencias de Husserl en la obra filosófica asequible de G.

Ni Husserl ni G lograron lo que buscaban en filosofía. Tampoco dieron argumentos convincentes para demostrar que sus ideales constituyen la mejor guía general para la empresa filosófica. Ni siquiera se sabe hasta qué punto fueron esenciales sus ideales para la consecución de las intuiciones filosóficas que lograron. A la mayoría de nosotros nos parece que la probabilidad inductiva basada en experiencia pasada favorece enfoques que persiguen resultados menos espectaculares y tratan de basarse más en la experiencia humana acumulada. Husserl habla de la filosofía como algo amenazado por la sugerente fuerza del «espíritu de la época» (p. 392). G deplora los «prejuicios de la época» y considera el presente un periodo histórico no favorable a la empresa filosófica. Es desde luego evidente que sus ideales no son muy ampliamente compartidos hoy en día. De ahí que lo más difícil en este momento sea no tanto dudar de sus enfoques cuanto defender los rasgos destacados de sus tesis filosóficas.

Hasta mi concepción de la filosofía, que persigue resultados menos definitivos y se esfuerza por emplear más datos, es tachada de demasiado ambiciosa por la mayoría de los filósofos contemporáneos. No veo por qué una concepción del mundo ha de ser tan privada como para no ser sino «una especie de fe religiosa personal».

Ni tampoco veo que el conocimiento objetivo sólo sea alcanzable en filosofía si ésta es «una ciencia apodícticamente rigurosa». De ahí que lo que busquemos en filosofía sean creencias ampliamente compartidas, y que para desarrollarla se puedan emplear también datos que se han revelado útiles para la construcción de una concepción del mundo. Lo que se ve como ambicioso e inalcanzable en mi concepción es su propósito de ser a la vez objetiva y de amplio alcance.

8.3. **La verdad y el espíritu de la época**

Aparte de centrarse en lo fundamental, G es excepcionalmente consciente de la distinción entre influencia y verdad, especialmente cuando evalúa escritos sobre asuntos humanos y sociales. Con esta distinción se halla correlacionada la que existe entre la dimensión «horizontal» de la amplitud del atractivo y la «vertical» de la longitud de su durabilidad. La influencia y la dimensión horizontal tienen naturalmente una relación más estrecha con el espíritu de la (más larga o más breve) época.

Hay una conocida concepción de la filosofía según la cual no es sino la empresa destinada a captar el espíritu de la época. G se opone a semejante concepción y la contrapone a la igualmente indefinida forma de concebirla como la búsqueda de verdad (fundamental). Como sus simpatías están más con la Grecia antigua y con la Europa occidental del diecisiete, culpa de lo que considera que son posturas falsas en la filosofía más reciente a los «prejuicios de la época». En concreto, afirma (véase la sección 1.1.3) «*No* considero mi trabajo una "faceta de la atmósfera intelectual de comienzos del siglo xx", sino más bien como todo lo contrario».

Cuando el tiempo se mide en términos de siglos y el interés se centra en la «verdad» realmente fundamental, la mayoría de nosotros no posee un criterio lo suficientemente poderoso como para distinguir la «verdad» filosófica de las grandes creencias condicionadas por el espíritu de la «época». De ahí que me sienta inclinado a considerar como una falta de humildad el tomar el acopio de nueva experiencia de los tres últimos siglos como prácticamente irrelevante para la filosofía. Es muy probable que mi creencia en lo que a esto se refiere sea más acorde con el «espíritu de la época» que la de G. Pero el desacuerdo tiene una fuente más profunda en las cuestio-

nes de qué es lo que uno quiere de la filosofía y cuál es la trayectoria más prometedora para alcanzarlo. No es que otros no quieran el tipo de metafísica que G quiere, sino sólo que la mayoría de nosotros no cree que sea alcanzable. En consecuencia, perseguimos metas más bajas y tenemos serias dificultades para estar a la altura de cualquier programa que se parezca siquiera ligeramente al de G en atractivo y concreción.

G dice con frecuencia que este no es un buen periodo histórico para la filosofía. Estoy dispuesto a asentir a esta aserción, la cual, sin embargo, significa cosas distintas para él y para mí, en la medida en que yo espero menos (al ser la mía una meta más baja) y tener más respeto por el «espíritu de la época» (al necesitar más datos). Al contrario que G, yo coincido con el espíritu de la época en creer que la búsqueda de una metafísica religiosa tuvo (y tiene) más que ver con la influencia que con la verdad. Si se puede hallar una religión buena, racional y efectiva, entonces a mí me parece que su influencia y su verdad se entremezclarán de tal modo que, de hecho, la gente no será capaz de distinguir una de otra durante algún tiempo. Parte de la razón de por qué éste no es un buen momento para la filosofía está en la común y bien justificada creencia de que no disponemos de semejante religión. Pero además de la conciencia de que no podemos hallar buenas razones para la creencia en otra vida, normalmente se cree, y con buenas razones, que éste no es momento para esperar filosofías tan grandes y extraordinariamente influyentes como las de Kant y Marx.

Si concebimos la razón y la racionalidad con la suficiente amplitud, la filosofía podrá considerarse como la empresa consistente en hallar una imagen (o comprensión) racional del mundo. Pero el concepto de racionalidad cambia con el tiempo y de una comunidad a otra. Tras de la Ilustración y de la teoría darwiniana, la idea de que no es racional creer en Dios y en la creación goza de amplia aceptación. Desde luego, no tenemos una refutación «concluyente» (o matemáticamente cierta) de Dios y de la creación. Pero este es precisamente el modo como se entiende la racionalidad, de suerte que, por ejemplo, a pesar del famoso argumento de Hume, es racional creer (tentativamente) en la evidencia inductiva. Por otro lado, el desenmascaramiento llevado a cabo por Marx y Freud, aunque muchas veces aplicado más allá de sus límites razonables, revela que buena parte de la racionalidad humana no es de hecho sino la engañosa cobertura de fuerzas dinámicas ocultas en la mente. Una aten-

ción adecuada a este hecho modifica indudablemente el ámbito de lo que se toma como racional.

Hay una tendencia a colocar a la ciencia natural en el centro (o a tomarla como modelo) de la razón. Pero también se habla de razón técnica, humanística y revolucionaria. El espíritu de sublevación contra dogmas, atrincheradas autoridades y diversas formas de injusticia actúa conjuntamente con una razón revolucionaria en el Renacimiento, la Ilustración, y el movimiento socialistas y (otros) movimientos de liberación. (En especial, la razón revolucionaria debe tener la función de refrenar la tendencia característica de la gente dedicada a luchar contra la opresión a reclamar demasiado para sí misma y para su causa.) Cuando la razón revolucionaria pierde su transfondo humanista, se convierte en razón técnica que se centra en cálculos de medios y fines y olvida propósitos y valores menos tangibles.

Relacionadas con la contraposición entre razón humanista y técnica están también las contraposiciones entre arte y ciencia, subjetivo y objetivo, así como entre particular y universal. En su uso crítico el «cientificismo» indica la inapropiada transferencia de métodos de investigación de los estudios naturales (o físicos) a los humanos. A la transferencia complementaria en la dirección opuesta tal vez pudiéramos denominarla «articismo». En filosofía se dan con frecuencia dos enfoques opuestos que no dudarían en aplicarse mutuamente uno u otro de estos dos términos (o lo que connotan). Por otro lado, también hay incrustaciones en la filosofía procedentes de ambos flancos: e.g., teoría de la decisión (y «teoría del bienestar»), de un lado, y teoría literaria, del otro. Aquellos que, por una u otra razón, no logran identificarse con ninguno de los campos conocidos anhelan alguna otra alternativa: o bien una mezcla adecuada o equilibrada, o bien un desarrollo más imaginativo de una forma más pura. Por ejemplo, en un sentido muy tosco, yo diría que G se dedicó a una filosofía de la «universalidad pura» (en lo que se refiere al producto final) y que el último Wittgenstein lo hizo a una de la «particularidad pura» (en lo que se refiere a la forma de presentación). Cada uno de estos dos tipos de trabajo posee a su manera un atractivo estético especial que es más fuerte que el que cabe hallar en la mayoría del trabajo filosófico contemporáneo.

Es un hecho conocido que algunas de las acciones y creencias de G no son muy racionales de acuerdo con los patrones ordinarios. En la memoria de Menger se recogen varios ejemplos. En los años

treinta, en Notre Dame, G «tuvo reyertas con el prefecto de su pabellón por toda clase de triviales razones» y dificultades en Princeton «a causa de un refrigerador supuestamente peligroso». «Ahora [1939] está completamente convencido de que importantes obras de Leibniz no sólo no se han publicado sino que incluso su manuscrito se ha destruido.» Respecto a los derechos legales, la «minuciosa puntillosidad de G no conocía límites» ni ponderación alguna de la importancia relativa de las consecuencias prácticas. En 1939, G estuvo preocupadísimo por la violación de sus derechos cuando «el régimen nazi le quitó su puesto de Dozent en la Universidad de Viena»; en los años setenta, causó mucho revuelo en el hospital y se privó a sí mismo de cuidados médicos que necesitaba con urgencia al insistir en que «no tenía derecho a uno de los beneficios que le ofrecían».

Es natural pensar que tales excentricidades no tienen nada que ver con la filosofía de G. Pero esto no es tan obviamente cierto, toda vez que él es enormemente coherente y que ser racional constituye el principal desideratum de su ocupación filosófica. En tanto que aplicaciones de su concepto de racionalidad, los ejemplos indican alguna rareza en él, que es probable que se refleje, por indirectamente que lo haga, en su filosofía. Así por ejemplo, la mayoría de nosotros cree que en igualdad de condiciones, el comer y dormir adecuadamente ayuda a uno a trabajar de forma más eficaz. O, al cabo de varias horas de trabajo concentrado, uno tiene con frecuencia la sensación de que no será capaz de concluir el amplio proyecto en el que se ha metido; pero para sorpresa de una o uno, la mañana siguiente le depara un fresco vigor y un nuevo optimismo. La repetida experiencia de esta sucesión de eventos le enseña a uno la lección de que, tras un adecuado reposo, cabe esperar una renovación de energías. Me parece que estaríamos de acuerdo en que estos dos ejemplos, si se los entiende adecuadamente, constituyen creencias racionales. No es probable que se desarrolle una filosofía tanto y con tanta exactitud que tales creencias se presenten como «teoremas». Pero si es posible ver que son inconsistentes con la filosofía de uno, entonces hay que concluir que la filosofía no ha captado el concepto intuitivo (concreto) de racionalidad que contiene a esas creencias. En cualquier caso, dada la creencia de G en la permanencia y precisión de los conceptos, lo que yo considero cambios en el concepto de racionalidad no son para él sino percepciones parciales distintas del concepto, el cual, por otro lado, me atrevería a conjetu-

rar que no es para él un concepto filosófico primitivo. De ahí que la discusión completa de esta sección no esté dentro del espíritu de la preferencia de G por buscar los conceptos primitivos y sus axiomas.

Ser racional y razonable es en ambos casos ser conforme a la razón o (en alemán) ser «vernünftig». Sin embargo, ser razonable parece incluir también una flexibilidad (o incluso debilidad) asociada con ser sensible, sano, moderado o no excesivo. Algunas de las aplicaciones de G del principio de que todo tiene una razón no parece que sean razonables, aun cuando tal vez puedan seguir llamándose racionales. Su desconfianza en los médicos parece que no sería ni razonable ni racional siquiera. Y aunque tal vez cupiera argüir que su aparente creencia en la viabilidad de la metafísica religiosa en tanto que teoría exacta es racional, uno se siente más inclinado a tacharla de no razonable. El objetivo principal de esta sección es lo racional, pero me gustaría añadirle una restricción postulando que lo racional no debe apartarse visiblemente de lo razonable. Así por ejemplo, me gustaría incluir un componente de adecuación, de acuerdo con el cual, ser «fanáticamente racional» ya no es, para mí, racional. (Una útil reseña del uso de la palabra «racional» se incluye en R. Williams, *Keywords,* 1983, pp. 252-256; en su lista se hallan incluidos también otros términos «cargados», tales como «ciencia», «teoría», «materialismo», «idealismo», «subjetivo», etc.)

Mucho daño se ha hecho en nombre de la razón, y la razón hoy día tiende a ser asociada con el deseo de preservar el orden existente (el *status quo*). Además, las grandes guerras, una distribución mayor de la información, y una mayor libertad de crítica han puesto más de manifiesto las limitaciones reales de la razón en este siglo. Como consecuencia de estos factores y de otros afines, se ha producido un incremento en la desconfianza de la razón, el cual ha ido acompañado de una aceptación de diversas reducciones del campo de lo que se considera el dominio propio de lo racional. Una observación de Bernays habla de un aspecto de este fenómeno sobre el que él y G están en total acuerdo (*Logic Colloquium* 73, ed. A. Rose y J. Shepherson, p. 1). «El positivismo se presenta para mucha gente como una actitud razonable de un hombre ilustrado por cuanto que indica una oposición radical a la autoridad intelectual. Sin embargo, de un antagonismo hacia las doctrinas confesionales pasa a un antagonismo general hacia todo tipo de creencias, se trate de nuestra instintiva creencia en la existencia de objetos exteriores, o de una creencia más abstracta en un marco de objetividad que nos sentimos impeli-

dos a adoptar en la ciencia.» Indudablemente, esta actitud negativa no se confina al «positivismo» (ni siquiera entendido en un sentido amplio), el cual suele asociarse con alguna forma de cientificismo. También es compartido por el campo opuesto, formado por quienes sienten aversión por la ciencia y la tecnología, así como por una racionalidad calculadoramente dirigida a metas (en el sentido de Max Weber), que se consideran poseedoras del monopolio de la razón y lo racional.

«El antagonismo», continúa Bernays, «hacia la creencia en las cosas y seres externos no es de hecho practicable en la vida real, pero a algunos filósofos les parece que puede ser mantenido como actitud filosófica». En contraposición, G parece enormemente consistente al adherirse a su actitud filosófica (racionalista) en la vida real. Al mismo tiempo, su admirable coherencia me parece que pone de manifiesto cierta inadecuación en su racionalismo (como se desprende de su, a mi juicio, injustificado optimismo acerca de la viabilidad de una metafísica exacta, en el sentido que él le confiere al término). La articulación plena y el dominio de todos los aspectos de la vida constituyen ideales de la actitud filosófica de uno que no resultan fáciles de alcanzar. G reconoce explícitamente no haber conferido una formulación satisfactoria a su filosofía. Su poco racional desconfianza en los médicos (y en la gente en general) tal vez sea también una ilustración de una verdad relativa a toda filosofía: que hay más cosas en los cielos y en la tierra de las ideadas en nuestra filosofía. Aunque la filosofía de G tiene como objetivo el descubrimiento de verdades objetivas fundamentales, no está claro hasta qué punto considera también los pasos hacia su consecución como una guía directa del modo de conducir su propia vida.

La preferencia que G siente por Leibniz en detrimento de Kant proporciona una pista para identificar algunos de los rasgos distintivos de su concepto de razón: una mayor atención a la «precisión», a la «profundidad», así como a un «principio» conciso, correcto, y fecundo, que promete desarrollos más concretos e independientes. En contraposición, el ampliamente expuesto sistema kantiano es considerado por G como un «poco sistemático» ajuste de piezas que ni son precisas ni logran penetrar más profundamente en el pensamiento puro. Kant tiene una idea de la matemática y de la física mucho menos real que G y Leibniz, y tampoco tiene un grado de penetración comparable en aquellos aspectos del pensamiento puro que hallan su concreción en la lógica matemática. Por otro lado, en

su *Monadología* y trabajos afines, Leibniz aborda imaginativamente ciertas cuestiones fundamentales de interés más permanente (tales como el inconsciente y el sutil funcionamiento de la volición), que no parecen ser tan claramente juzgadas por Kant. (Por ejemplo, la teoría leibniziana de la volición, expuesta en su *Teodicea,* es presentada por Alfred Schutz en el contexto de la investigación actual, en las pp. 88-92 de su *Collected Papers,* I, 1962.)

Por otro lado, Kant captó el espíritu de la época en una coyuntura especialmente importante: el momento en el que los vigorosos ideales de la Ilustración y algunas de sus limitaciones estaban maduros para una gran síntesis. En concreto, Kant presentaba una consideración más «moderna» de la religión y dedicaba más atención al componente material del mundo, además de resaltar la dimensión estética y situarla en el ámbito de la experiencia humana (de un modo muy del agrado de los defensores del arte por el arte mismo). Su prolífica producción (en su edad madura), junto con un impresionante despliegue de jerga técnica y distinciones artificiales dan la impresión de una estructura definitiva, presentada en todos sus aspectos esenciales, y concuerdan perfectamente con la mentalidad del emergente clan de filósofos profesionales. Además, su capacidad para hablar con sentido de la ciencia, la moral, la religión, el arte e incluso la historia atrae al público inteligente y refuerza la creencia de que su filosofía llega a los fundamentos de todos los aspectos importantes de la experiencia humana. [Un temprano ejemplo del desacuerdo sobre los méritos respectivos de las filosofías de Leibniz y Kant (y sobre la originalidad de Kant) se recoge en H. B. Allison, *The Kant-Eberhard Controversy,* 1973.]

Según Kant, Leibniz intelectualizó las apariencias, igual que Locke sensualizó todos los conceptos del entendimiento. En contraposición, él afirma haber elaborado un sistema que ve «en el entendimiento y la sensibilidad dos fuentes de representación que, aunque muy diferentes, sólo pueden ofrecer juicios objetivamente válidos sobre las cosas *en mutua unión» (Razón Pura,* A271, B327). Hablando en términos generales, la sensibilidad suple lo particular, el entendimiento, lo universal. Esta imagen es compatible con su idea de construir el conocimiento físico mediante la labor de principios sintéticos *a priori* (del entendimiento) sobre datos suministrados por los sentidos. Por otro lado, según Kant, Leibniz «no confirió a la sensibilidad ningún tipo de intuición peculiar, sino que buscó toda representación de objetos, incluso empíricos, en el intelec-

to, y no dejó a los sentidos nada más que la despreciable tarea de confundir y distorsionar las representaciones del primero» (A276, B332). (Una amplia discusión de la crítica que Kant hace de Leibniz puede hallarse en G. Della Volpe, *Logic as a positive Science,* 1980, pp. 5-9.)

El 11 de mayo de 1781 Kant escribía a su amigo y antiguo alumno Marcus Herz hablándole de la importancia de su recientemente publicada *Crítica de la razón* pura para la metafísica: «No obstante, confiesa, toda persona que sea claramente consciente del estado actual de la metafísica encontrará que vale la pena el esfuerzo de dejar de lado todas las demás cosas de esta esfera hasta que se entiendan completamente los problemas tratados en mi libro» (G. Rabel, *Kant,* 1963, p. 127). Luego pasa a sugerir una organización alternativa del libro, que gozaría de más atractivo popular y probablemente sería más afín a su propio proceso de pensamiento: «Este tipo de investigación será siempre difícil y algunas veces forjo en mi mente un esquema relativo a cómo podía lograr también popularidad. Haber empezado haciendo directamente esto, cuando había que esclarecer primero el terreno, no hubiera sido adecuado. De lo contrario, debiera haber empezado por el capítulo sobre las antinomias, que podría haber sido escrito en un estilo brillante, capaz de despertar el deseo de los lectores de investigar las fuentes de este conflicto. Pero primero hay que satisfacer los requisitos de la Escuela, luego uno puede tratar de dar gusto al mundo.»

La solución que Kant da al tema de las antinomias depende fundamentalmente de su concepto negativo de cosa-en-sí, que da nombre a los distintos modos en que la realidad exige «algo más» por encima de lo que resulta cognoscible de acuerdo con su concepción de la facultad humana de la cognición. La cosa-en-sí representa una barrera, un límite, un residuo, un sustrato o la realidad última. Las formas con que somos capaces de conocer el mundo (como ocurre en las matemáticas y en la física) sólo consiguen llegar a aquella parte del mundo que se somete a ellas. En otras palabras, podemos ver una gran cantidad de orden en el mundo porque lo que vemos pasa por el filtro de nuestras propias formas. El mundo y el orden que conocemos son «creados» por nosotros en el sentido de que se hallan confinados a aquellas partes, imágenes o efectos de la realidad última que pueden ser ordenados por nuestras formas. El contenido de estas formas (o, en la contraposición entre materia y forma, la materia) es una especie de «materia inteligible» y la facticidad

siempre se escinde en un componente teóricamente incognoscible y una imagen reinterpretada que se filtra a través de nuestras formas eternamente fijas. Por lo demás, dado que tales formas imponen una barrera o límite externo a la experiencia posible, las antinomias son vistas como el resultado de confundir fenómenos con noúmenos, más que como una invitación a ir más allá de lo que actualmente es conocido o cognoscible, y a ver las potencialidades de una expansión no limitada de antemano de nuestro conocimiento que no conoce ninguna barrera predeterminada entre realidad última y lo que es cognoscible. (Al final del capítulo siguiente, haré algún comentario más sobre Kant.)

Un aspecto del objetivismo de G estriba en negar la tajante distinción kantiana entre la cosa-en-sí y nuestra mente. En concreto, él cuestiona que la «síntesis» tenga que ser subjetiva (BP, p. 272). En este sentido, me convence más la postura de G que la de Kant. No tengo del todo claro qué diferencia hay a la postre entre hablar de conceptos cambiantes o de percepciones cambiantes de conceptos fijos (como G prefiere hacer). Incluso me parece que el «idealismo» de G no excluye la posibilidad de una monadología sin la mónada central («Dios»). Creo que hay diferentes modos posibles de desarrollar ampliamente tal monadología y diferentes interpretaciones posibles para cada desarrollo. No veo con claridad que el resultado haya de ser incompatible con algunas de mis poco articuladas creencias básicas, que generalmente se asocian con el «materialismo» en algún sentido adecuado del término.

En cuanto a su vida externa, Leibniz fue desde luego radicalmente distinto de G. Leibniz quiso hacer carrera política, se comprometió intensamente en los problemas de su tiempo, se metió de lleno en proyectos políticos, diplomáticos y en proyectos prácticos de otra clase (entre los que figuran sus intentos por lograr una unión de las Iglesias, sus arduas e infructuosas actividades en las minas de Harz, etc.). A diferencia de G, Leibniz participó en toda suerte de controversias contemporáneas. ¿Cómo reconciliar esta gran diferencia de vidas con la adhesión de G a la perspectiva filosófica general leibniziana?

Una respuesta obvia consiste en decir que, conforme a la concepción que G tiene de la filosofía, los intereses filosóficos son tan básicos como para no verse afectados por circunstancias tan contingentes como la vida de uno. De un modo alternativo y más fuerte, cabría afirmar que G ha absorbido todo lo que en la experiencia

personal de Leibniz hay de filosóficamente relevante, lo cual sirve, por consiguiente, como parte de los datos (más ricos) de G. Pero no creo que una solución tan elegante cuente toda la historia. Más bien me parece que hay aquí un interesante problema a explorar por quienes están familiarizados tanto con G como con Leibniz. Me parece que, por ejemplo, el libro *Leibnitz and the Seventeenth-Century Revolution* (de R. W. Meyer, versión inglesa de 1952) contiene algunas sugerencias interesantes.

Se dice de Leibniz (en la p. 8) que vivió «todas las controversias concretas y minuciosas de su época, las aserciones directas de las incompatibilidades: tradición contra reforma, mito contra conciencia, derecho contra poder, libertad contra compromiso, voluntad individual contra común —tales son las antinomias que él ha de afrontar. De ahí que el problema de la paz domine su pensamiento». G también confirió a la paz el más alto valor, pero, como la mayoría de los intelectuales contemporáneos y, a diferencia de Leibniz, no emprendió ninguna acción directa ni intentó siquiera una elucidación directa de los fundamentos de un orden futuro.

Leibniz mantuvo una especie de correspondencia universal. «Las cartas eran, para decirlo brevemente, fuerzas espirituales que, como las fuerzas físicas newtonianas, evocaban respuesta y reacción a distancia» (*ibíd.*, p. 103). Sus cartas «se hallan siempre en perfecta armonía con el estado de ánimo de los destinatarios». G no escribió muchas cartas, pero, en general, sus escritos tampoco carecieron de habilidad para tomar en consideración las situaciones y preconcepciones de los destinatarios. Más en general, creo que la siguiente aserción acerca de Leibniz (p. 9) puede decirse también de G: «Las pretensiones críticas de su filosofía deben distinguirse de sus pretensiones especulativas. Pues, en tanto que pensador crítico, cree que su tarea estriba no únicamente en llegar a conocer los límites del hombre, sino también en asumirlos humildemente; el principio teórico de la consideración crítica del Yo no es sino el principio de tolerancia.»

Con lo que es probable que G congeniara más es con la convicción que Leibniz tuvo en los últimos años de su vida de haber «hallado una solución al problema de relacionar lo individual con lo universal». Por ejemplo, según Leibniz (y G), «La observación de la esencia de las cosas no es más que una observación de la esencia de nuestro espíritu» (*Nouveaux Essais*, libro I, 21). Pero esta idea parece despojar a la relación interpersonal de buena parte de su interés fun-

damental. «En esta doctrina de absolución personalista», según Meyer, «no es posible ninguna comunidad real. Y en este punto la noción leibniziana de espíritu soberano del hombre viene a contradecir su propia idea de tolerancia» *(ibíd.,* p. 9). Herder admiró la «poesía reflexiva» de la *Monadología,* y Federico el Grande habló negativamente de un «Monadenpoeme»; Lessing se dirigió a Leibniz en busca de sus «valores psíquicos» *(Gemüthswerte).* Tales reacciones son muy distintas de la de G que toma la obra como modelo en su búsqueda de una filosofía como ciencia rigurosa. El buscar una filosofía exacta (y universal) que al mismo tiempo satisfaga nuestras necesidades emocionales constituye, desde luego, un ideal sumamente atractivo. Pero también es fácil pensar en la mónada como el símbolo mítico de un individualismo ilimitado, seguramente lo contrario de lo que Leibniz y G pretendieron que era.

Capítulo 9
EL AJUSTE DE TODAS LAS PARTES

Si la función de la razón es hallar orden en el caos de la experiencia humana, entonces lo adecuado es concebir la razón y la experiencia (y la existencia) en el sentido más amplio (o más débil) posible, a la vez que se distinguen e interrelacionan sus principales tipos. Todas las actividades humanas, prácticas, intelectuales o artísticas entrañan la interacción de razón y experiencia, entendidos en este sentido. A medida que consideramos complejos del mundo cada vez más grandes, el esfuerzo por encajar las cosas va desempeñando un mayor y más importante y complejo papel en la confrontación de uno mismo con el mundo.

Algunas veces nos vemos sorprendidos reflexionando sobre la experiencia, la vida o la existencia como un todo, o al menos en un dominio que transciende la conocida particularidad de un problema aislado o un aspecto limitado de la experiencia. Recuerdo, por ejemplo, haber estado perplejo (a los ocho años) por el problema de si el universo es finito o infinito en el espacio y en el tiempo. A los diez me parecía un axioma que la gente no puede menos de ser igual en el punto de partida y que sólo se distingue por su propio esfuerzo. Es indudable que estas experiencias de la infancia son bastante comunes. Pero la mayoría de nosotros no volvemos a preocuparnos por las implicaciones de tales perplejidades y creencias.

La experiencia más memorable y universal es la de pensar en

qué hacer con (lo que queda de) la vida de uno, especialmente en algún momento de la adolescencia. Desde luego, mucha gente considera este problema periódicamente, unas veces casualmente y otras de modo sistemático. Mas una ocasión temprana generalmente contempla un abanico más amplio de posibilidades. Sólo en casos excepcionales damos con lo que Dilthey denomina «proyectos de vida». En la mayoría de los casos, la opción es más tentativa y menos definida. Por ejemplo, a los diecisiete años yo tenía la ingenua idea de que, como uno no puede hacerlo todo, pero sí es capaz de comprenderlo todo, yo debería preferir el entendimiento a la acción. El problema concreto de elegir una vocación por parte de una persona indica e incluso envuelve el más amplio de quién debe hacer qué cosa. Este me parece que es uno de los pocos problemas vitales que llevan muy directamente al proyecto consistente en hallar un orden en la experiencia humana global.

Aunque la mayoría de la gente, durante la mayor parte del tiempo, no se ocupa explícitamente de la vida como un todo, tal preocupación se manifiesta en la religión así como en algunas partes del arte y de la filosofía. En la tradición europea, en general, se acepta que esta preocupación tiende a llevar a los tres problemas metafísicos más importantes para la comprensión del sentido de la vida: (la muerte y) la inmortalidad, la libertad de la voluntad (y la necesidad natural) y la existencia de Dios. No soy capaz de ver ninguna conexión natural entre la preocupación por el todo y estos tres problemas. Este hecho debe tener mucho que ver con la época y la sociedad en la que crecí. En cualquier caso, a mí me parece claro que no hay conexión lógica entre una preocupación por el todo y estos tres problemas. Si el cometido principal de la metafísica son estos problemas, entonces la metafísica no me interesa nada. En otras palabras, no veo semejante metafísica (religiosa), como a veces hace Gödel, como una parte fundamental de la filosofía. Es más, ni siquiera incluiría estos tres problemas, entendidos en su sentido tradicional, entre las cosas a que ha de atender una filosofía.

9.1. **El ajuste de las cosas**

Los conceptos de todo y parte figuran entre los más incluyentes de todos nuestros conceptos. Puesto que todo puede hacer las veces de parte de otras cosas, dado un grupo de cosas, siempre podemos

preguntarnos si y cómo encajan éstas en tanto que partes de un todo. El encajar algunas cosas puede ser interesante en sí mismo, como representación de una situación típica, o como base para iteraciones, bien para continuar en el tiempo, bien para formar todos cada vez más amplios. El engranaje de deseo y realidad (o la armonía entre el principio de placer y el principio de realidad) es un estado que la mayoría de nosotros persigue durante la mayor parte del tiempo. Puede significar un instante de consumación o un estado dominante en la vida de una persona o incluso de un grupo de personas. De igual modo, los estados ideales constituyen la unión del yo con la naturaleza, la unidad de pensamiento o acción (o de teoría y práctica), y el «sujeto-objeto idéntico». Es conocido lo complejo que resulta para una persona, clase, nación, historia o filosofía perseguir (que no alcanzar) uno u otro de esos límites ideales.

El ajuste es en mayor o menor medida sinónimo de consistencia, coherencia, armonía, y orden (a partir del caos). Constituye un ingrediente esencial de las nociones de racionalidad, seguridad, organismo y comunidad. Está estrechamente relacionado con el concepto, más esquivo, de adecuación. Estos y un núcleo de conceptos afines apuntan todos ellos a (la búsqueda de) un estado aparentemente deseable de cosas que se contrapone a la separación, aislamiento, atomismo, especialización, gratificación instantánea y contacto punto a punto. La prosecución incondicional de un único fin es generalmente más inmediata y más efectiva. La inmediatez cobra vigor más directamente y la efectividad añade su propia satisfacción a la que acompaña a la consecución del fin. Si la pureza de corazón estriba, como dice Kierkegaard, en desear una cosa, entonces el lograrla supondría ganar la mitad de la batalla fijando aquello que guía la selección de las partes y el proceso de ajuste de las mismas.

Armonía y orden puede decirse que significan que las partes encajan. Pero si las partes no son inalterables, la armonía de un momento de tiempo es precaria. Esta es la razón por la que lo de «vivir felizmente a partir de entonces» raramente ocurre en la vida real. Consumación (en especial de una armonía fija) tiene también en el diccionario el significado de muerte. Muy pocas personas viven una vida en la que, a su término, encajen todas las partes; este hecho es un conocido factor para desear e incluso argüir en favor de otra vida en la que concluir lo que se ha iniciado en ésta. Quienes consideran mal fundamentado este deseo deben considerar la vida como,

amén de otras cosas, una preparación para la muerte en el sentido de buscar el logro del mejor ajuste posible de las partes antes de la muerte. Si son capaces de verse a sí mismos como partes integrantes de una comunidad (una familia, una comunidad, una clase, una nación, la especie humana o el mundo), hay más cabida para interpretaciones alternativas de cuáles sean los mejores modos posibles de completar la propia vida. Esta necesidad no hace la tarea más fácil, ya que las interpretaciones dependen en buena medida de lo que uno crea que sucederá en el futuro.

El mundo está lleno de peleas, luchas, conflictos diferencias, desacuerdos, contradicciones y desigualdades. Hallar armonía en el mundo parece que tendría que requerir fe en algunos postulados audaces o pagar el precio de la hipocresía, la evasión, la distorsión, o (si uno es afortunado) ser un miembro devoto y «triunfador» de una reducida parte del mundo. Si lo que se quiere es ver la totalidad del mundo tal como es, entonces el ideal de una representación armoniosa (que incluya incluso extrapolaciones razonables en el futuro) parecería estar prejuzgando la cuestión en beneficio de deseos humanos acríticos. Hasta los conocidos recursos de considerar los males como instrumentos para el bien y de demandar únicamente por una libertad basada en un conocimiento de la necesidad generalmente han de apelar a la mal-definida hipótesis de un Dios o de un futuro paraíso en la tierra, basada en una evidencia poco adecuada. La mayoría de nosotros se conformaría con una armonía local en el pequeño fragmento del mundo que a cada uno de nosotros le ha tocado en suerte. Naturalmente, cada persona está en la vida inmersa dentro de los límites de un círculo mayor o menor, satisfaciendo más o menos demandas de la vida y cosechando gratificaciones para un número mayor o menor de sus deseos. Cada vida cierra un círculo que conecta a la persona con una parte del mundo, por medio de sus interacciones a lo largo de la duración de la misma. Las más de las veces, suele ser una suerte no ser consciente de hechos y problemas que no tienen una incidencia directa en la vida diaria de uno. Parece ocioso especular acerca de todos los aspectos (básicos) de la totalidad del mundo con el fin de hallar algún orden en el gran caos.

Sorprendentemente, donde más se ha progresado no es en el dominio humano sino en la comprensión del mundo físico como un todo y, en menor medida, en los campos de la biología y la geología. Lo que era de esperar es que, al ser la gente, como apunta Vico, «la

que ha hecho este mundo de naciones», fuera más fácil comprender la historia y la sociedad que el mundo físico. Ahora estamos todos acostumbrados a la idea de que somos capaces de lograr el más fidedigno y minucioso conocimiento en física. Mas éste es fundamentalmente el resultado de nuestra experiencia histórica durante los últimos cientos de años. En un periodo o una sociedad sin esta experiencia, generalmente se da el caso de que tenemos más conocimiento de los asuntos humanos que de la física. El que la física haya resultado ser el tema en que se ha adquirido un conocimiento más sólido ha sido, si se puede hablar así, una sorpresa y un «accidente» histórico. En cierto modo, aunque no hemos hecho el mundo físico, proyectando en él algunos conceptos simples que hemos extraído de él, nos hemos asombrado de ver lo estable que es y lo bien que se comporta conforme a los principios que hemos formulado sobre la base de la sumamente parcial experiencia del mismo. De ahí que las mayores preocupaciones de la filosofía moderna hayan sido intentar dar una interpretación plausible de esta sorpresa y determinar los límites de tan eficaz método.

Cuando pasamos al mundo humano, nos encontramos con que es más difícil conseguir la universalidad de la física. Las principales escuelas de pensamiento y tradiciones filosóficas emplean distintos conceptos, lenguajes y orientaciones. Hay descripciones alternativas y aparentemente incompatibles del mundo humano que, a la vez que facilitan la comprensión al destacar los aspectos importantes, la entorpecen al levantar una barrera entre la realidad y el propio pensamiento. Los textos se convierten en parte de la realidad, enriqueciéndola y, al mismo tiempo, haciéndola más compleja y, generalmente, más oscura.

Un aspecto importante de las ideas generales sobre el mundo humano es su relación con el tiempo y el lugar, o el modo de ajustarse al Zeitgeist (de las más amplias comunidades culturales). En su *The Spirit of American Philosophy* (1963), John E. Smith considera a Peirce, William James, Royce, Dewey y Whitehead, pero no a Santayana. Se siente obligado a hacer una defensa de su exclusión de Santayana y de su inclusión de Whitehead. Las razones respecto de Whitehead parecen un tanto débiles: «Su llegada a América supuso la oportunidad y el estímulo para su pensamiento más original, y él le brindó a su vez al mundo intelectual americano una nueva visión de sus propios fundamentos» (p. 163). Sus observaciones sobre Santayana resultan, en cambio, esclarecedoramente relevantes para la

cuestión del Zeitgeist (p. X): «Su pensamiento no es representativo de la principal corriente del pensamiento americano. La mentalidad americana, tal como Santayana la vio, es voluntarista y no contemplativa; es moral y moralista más que estética; estaría dispuesta a prescindir de la religión antes que retenerla como mera poesía; no aceptará una teoría de la realidad de acuerdo con la cual el yo sea una apariencia o algo evanescente. La mentalidad americana, en suma, ha sido todo menos aquello que Santayana fue y representó.»

Estas observaciones y buena parte del libro de Smith ilustran bien tanto la fuerza como la debilidad de poderosas filosofías regionales que hablan en favor del espíritu de la época. La contraposición con Santayana parece que revela la unilateralidad de lo que Smith llama «la mentalidad americana». Escribiendo en 1962, Smith afirmaba, «la época dorada de la filosofía americana ha pasado ya y se ha extinguido para algún tiempo» (p. 197). Al mismo tiempo, no deja de señalar algunas de las deficiencias intrínsecas y de los limitaciones dependientes del tiempo de la principal corriente de «la época dorada». «La posibilidad de que en el ego haya profundidades que no pueden ser aprehendidas por el método experimental ni dominadas por la inteligencia instrumental fue sigilosamente pasada por alto» (p. 196). «Cataclismos fuera e inseguridades dentro han servido para esclarecer cuestiones acerca de los valores genuinos y los fines dignos de consideración. Los americanos no están tan seguros como estuvieron antaño de que si se resolvieran las cuestiones de medios, los fines se darían por añadidura» (pp. 197-198). Tal vez el estado reciente de la filosofía americana, tan insatisfactorio para Smith como para muchos otros, tenga algo que ver también con los esfuerzos preparatorios para ir más allá de las filosofías regionales.

No existe una distinción suficientemente clara entre las responsabilidades de describir las cosas como son y la de hallarlas propicias para ciertos deseos humanos preconcebidos. El que las sinceras convicciones de uno coincidan con las aspiraciones de un segmento más amplio de la comunidad a la que pertenece es una cuestión de mayor o menor accidental buena suerte. Esto es distinto de tratar de satisfacer (o verse impelido por) el «afilosófico» deseo de ganarse el favor de la multitud o, equivalente o alternativamente, incluso de dar gusto a la autoridad que esté en el poder. Evidentemente, nadie puede librarse por completo de todas sus presuposiciones e ilusionadas creencias al pintar un cuadro del mundo.

9.1.1. *El derecho a creer*

No se puede negar que nuestras creencias, cuya esencia es una disposición a actuar, están influidas por nuestra voluntad y deseos. La voluntad (o más bien el derecho) de creer, popularizada por William James y criticada por Santayana, tiene un aspecto privado y un aspecto público que, aunque interrelacionados, se pueden distinguir. En ambos aspectos hay un ideal de adecuación que ha de enfocarse con una dialéctica de hechos y deseos. Por ejemplo, la creencia en el éxito sólo puede ayudar a llevar a él si la creencia es relativamente realista. Para poder concluir un determinado trabajo, generalmente se ha de suspender la duda razonable acerca de la importancia del proyecto. Y en este caso, el aspecto privado del derecho a creer puede llevar a un resultado público negativo añadiendo un texto inútil más. Generalmente, la determinación de posponer una decisión o de suspender el juicio acerca de una cuestión puede ser una acción correcta o no, dependiendo de una multiplicidad de factores.

El ejercicio juicioso del derecho a creer puede llevar al ideal chino favorito de «regularse y respaldarse uno a sí mismo» (*anshen liming*), que es algo privado e incluye la idea de retirarse de lo público para cultivar el yo. Una aplicación más ambiciosa del derecho a creer la constituye su función constructiva pública encaminada al ideal de coordinación o de creación de una unidad a partir de una multiplicidad. Un elemento esencial en las religiones es el diseño de creencias que traten de combinar la oferta de incentivos para los individuos con una conformidad a los requisitos necesarios para la consecución de un bien público. En el terreno secular, la «mano invisible» de Adam Smith promete, con ciertas reservas, la misma clase de combinación de logros egoístas que se espera que sirvan conjuntamente al bien público. Gödel dice algunas veces que el marxismo no llega a ser una religión. Creo que quiere decir que el marxismo no logra ofrecer, más que en circunstancias inusuales, los suficientes incentivos como para que un número suficiente de individuos persigan con el necesario vigor una meta común clara y previsible.

El interés en conseguir cierta unidad en una multiplicidad es, desde luego, familiar a toda comunidad o grupo con intereses compartidos, sea una familia, una profesión, una clase, o una nación. La interacción entre el derecho a creer y las verdades establecidas

(«que describen las cosas como son») se produce en varios niveles, entrañando en diversa medida una multiplicidad de factores tales como la urgencia de la necesidad de actuar, el grado de relevancia de la creencia en cuestión, el tamaño y la naturaleza del grupo llamado a compartir la creencia, la adecuación de la reducción de un interés compartido a propósitos más asequibles, etc. Adoptar como política general el actuar («positivamente») en casos de seria duda no deja de tener un sabor optimista, aun cuando los conceptos cruciales de la máxima sean un tanto difíciles de hallar.

En lo referente a los casos más elevados, un miembro de un grupo se ve urgido a ejercer su derecho a creer una multidividida y sólo parcialmente determinada proposición que establece (digamos) una meta nacional de amplio alcance y propone ciertos tipos de medidas tentativas para alcanzarla. Si el programa es razonablemente realista, la mayoría del grupo, al optar por creer la proposición, contribuirá a crear una determinación del contenido de la misma afín a la intención original y a convertir en verdadera la creencia original (descendiente de la menos determinada). Tenemos aquí otro ejemplo de preocupación vital por la vida real que requiere la consideración del mundo como un todo. Ni qué decir tiene que los esfuerzos tendentes a diseñar y hallar modos de comprender tales creencias son ampliamente considerados como un tipo de actividad filosófica. Si se lo identifica con la filosofía, entonces su relación con y su distancia de la política inmediata se convierten en un problema agudo. La experiencia parece probar que un distanciamiento inadecuado es perjudicial tanto para la filosofía como para la política, no sólo a largo plazo, sino también mucho más directamente de lo que la mayoría de las autoridades políticas están dispuestas a admitir.

9.1.2. *Propósito y distanciamiento*

Según G, el significado del mundo es (el proceso de tratar continuamente de superar) la separación entre deseo (más generalmente, fuerza) y realidad. Los deseos son ellos mismos una parte importante de la realidad; el cambiarlos constituye el componente crucial menos maleable de nuestro esfuerzo por engranar deseo y realidad. A medida que nuestros deseos se modifican y enriquecen, el ámbito de las actividades intencionales se amplía hasta contener, además

de las actividades prácticas, también las intelectuales y las artísticas. Por otro lado, no resulta fácil trazar la divisoria entre lo real y lo ilusorio dentro de ninguno de los dos ámbitos de los deseos y sus satisfacciones.

No obstante esto, tan pronto como llegamos al omnipresente concepto de propósito, distinciones fundamentales aunque difíciles de establecer reclaman su presencia. Hay propósitos y propósitos. Ciertas cosas las hacemos por sí mismas; otras las hacemos, voluntaria o involuntariamente, con o sin placer, con vistas a conseguir un fin. (En el caso más extremo, la mayoría de nosotros cultiva defensivamente, en mayor o menor grado, una satisfacción negativa en librarse de ciertas tareas que detestamos realizar pero que «tenemos que hacer».)

Según G. E. Moore, «El afecto y el aprecio personales por lo que es bello en el arte o en la naturaleza son en sí mismos buenos». Por otro lado, «Si consideramos estrictamente qué cosas vale la pena poseer *simplemente* por *sí mismas»,* pasa luego a afirmar, ninguna otra cosa «tiene *apenas* tan gran valor como» esas *(Principia Ethica,* 1903, pp. 188-189). Pero ¿acaso el alimento, el vestido, el abrigo, el sexo, o un trabajo bien hecho no pueden cada uno de ellos ser considerados como una experiencia (o una actividad) o una cosa que posee un gran valor (intrínseco)? Enseguida detectamos aquí una ambigüedad básica en la noción de preferir un valor u otro, que depende de si tenemos ambas cosas o tenemos que elegir entre ellas.

Moore distingue entre la bondad como atributo de los estados mentales y la rectitud como atributo de las acciones. De ahí que la persecución de la bondad no pueda ser otra cosa que una actividad dirigida a la consecución de ciertos estados mentales. También discute detalladamente la importancia relativa de las cualidades mentales y de la belleza, cosas ambas esenciales para el valor, en lo que respecta al afecto personal de uno (pp. 203-204). Treinta y cinco años más tarde, J. M. Keynes volvió sobre «Mis primeras creencias», que se hallaban contenidas en el libro de Moore (véase *Two Memoirs,* escrito en 1938 y publicado en 1949, pp. 94-95, 92 y 99). Las intuiciones fundamentales del libro, dice Keynes, «son demasiado escasas y demasiado pobres como para casar con la experiencia actual que presenta un contenido más rico y variado». «Llama la atención el modo en que se las ingenió [Moore] para ignorar del todo las cualidades de la vida de acción y también los esquemas de vida como un todo.» «Nos faltaba reverencia... por todos y por todo.»

La mayoría de nosotros la mayor parte de las veces no atendemos a nuestros estados mentales y preferimos pensar, en primera instancia, en términos de acciones y propósito más que de los estados mentales que los acompañan. A menudo nos cansamos de las actividades intencionales y queremos descansar, jugar, tener distracciones y experiencias estéticas. Buena parte de la experiencia estética tiene que ver con las necesidades básicas del sexo y otras interacciones sociales, y, en menor medida, con el alimento, el vestido y el abrigo. Estamos continuamente creando nuevas necesidades y nuevos proyectos. Por decisión propia o por la fuerza de las circunstancias, el trabajo se convierte generalmente en una necesidad básica, y del estado mental generalmente gratificante que acompaña al trabajo deviene una de las principales metas a lograr en la vida. Así, la característica principal de la idea que G tiene de paraíso es que todo el mundo disfruta de un feliz matrimonio y de un feliz trabajo.

Una bifurcación fundamental y no exenta de utilidad de las actividades de cada persona en la sociedad es la que existe entre lo que (uno o una) hace en su trabajo y lo que hace en su «tiempo libre». Cuando contemplamos los roles sociales de diferentes tipos de trabajo, nos llaman la atención las diversas distancias a que se hallan de las prácticas sociales directamente relacionadas con las necesidades sociales más obvias. Un ejemplo típico podría ser la impredecible distancia entre buena parte de la investigación biológica básica y sus aplicaciones médicas. El papel social de la actividad intelectual y artística es, directa o indirectamente, cambiar nuestros deseos y otros hechos cambiando la conciencia individual y social. Ambos tipos de actividad se hallan interrelacionados. Así por ejemplo, la poesía es un medio no sólo de imágenes, sino también y necesariamente, de ideas. El componente estético de la actividad intelectual se halla presente en las diferentes cosas que se entienden por «no sólo hacer algo sino también hacerlo bien» así como en conseguir ver importantes conexiones que han escapado a otros.

Cada disciplina de ambos tipos de actividad tiene también su autonomía. Es en buena medida por referencia a esta autonomía como los profesionales de una disciplina aprecian y aplauden un ejemplar de actividad (teórica o de otro tipo) fundamental en la misma. Pero si transcendemos los límites de las bien estructuradas y claramente delineadas disciplinas, como hacemos en el proyecto de conexión de todas las partes, entonces tanto el proceso de realiza-

ción como el criterio de identificación de algún trabajo teórico fundamental se hacen más complejos y menos predecibles. Es del todo natural no simpatizar con los esfuerzos tendentes a ajustar las partes entre sí porque se considere imposible o inútil o incluso positivamente perjudicial esta tarea. Un orden que todo lo abarque puede ser nocivo porque no es improbable que sea engañoso y que se haga un mal uso de él. Hay también una amplia y poco articulada idea o sentimiento que conecta el orden con la autoridad y la limitación de la libertad. Pero, aunque la búsqueda de un orden omnímodo puede eliminar ciertas posibilidades aparentes, también puede apuntar otras nuevas. En cualquier caso, si el objetivo es describir las cosas como son, entonces no puede haber ningún plan autoritario conscientemente abrigado.

9.2. **Aspectos metódicos**

¿Cómo abordar la tarea de encajar las cosas entre sí? G dice algunas veces que si uno lo sabe todo sobre sí mismo, lo sabe todo: una vez que uno se comprende a sí mismo, comprende la naturaleza humana, y luego todo lo demás. Esta observación apunta a la idea leibniziana de que cada mónada es un espejo del universo y lo que se requiere es esclarecer sus percepciones. Esto lleva a la cuestión de las diferencias individuales (en lo que se refiere, e. g., a sus grados de «madurez») y de la relevancia de la posesión o de la carencia de ciertas experiencias y conocimientos específicos, para el proyecto de una comprensión «completa» de uno mismo. Tanto G como Husserl parecen defender la suficiencia de la experiencia cotidiana como datos para la filosofía. Peró las obras filosóficas del propio G presuponen una buena dosis de conocimientos lógicos, matemáticos, físicos y de historia de la filosofía, que difícilmente cabe esperar que provengan sólo de la «experiencia cotidiana». También parece haber leído mucho y en algunos casos al menos (como ocurre con las obras de Leibniz y Husserl), con todo detalle. Puede que estas separaciones de la experiencia cotidiana no sean para él sino instrumentos o escaleras (que luego habrán de arrumbarse) para llenar la laguna existente entre la limitada capacidad de uno para percibir lo abstracto y lo que se requiere para un progreso decisivo en el análisis de la experiencia cotidiana. El ideal de su filosofía es ser «preciso, pero no técnico».

Aunque también encuentro atractivo este ideal, no soy capaz de vislumbrar una vía plausible que lleve al requisito de la precisión de G en la forma de una teoría axiomática que requiere la determinación de los conceptos primitivos y de aquellos axiomas percibidos como verdaderos por nuestra intuición. No cabe duda de que la mayoría de nosotros tiene tendencia a cargarse de datos inútiles, cuando, en general, lo esencial puede percibirse con toda claridad con ayuda de una reflexión más detallada o del análisis de muchos menos datos. Pero no soy capaz de ver por qué el método axiomático es particularmente apto para la filosofía. Más bien me inclino a pensar que hay bastantes ideas sugestivas y hechos que requieren ser encajados en cualquier forma que nos resulte atractiva. Por otro lado, siento más respeto por la contingencia de la experiencia humana y como un todo de cada individuo. Buscar una teoría axiomática en filosofía me parece una tarea menos fructífera que aceptar el contenido para determinar la forma. El espíritu mismo de la idea de ajustar entre sí todas las partes es distinto del que anima el requisito de G de que hay que ser «completamente sistemático».

Si A pudiera seleccionar un pequeño número de individuos cada uno de ellos con una buena comprensión de la experiencia humana y si A pudiera leer todas sus mentes, entonces podría decirse que A posee los datos suficientes y quedaría para A sólo (!) la formidable tarea de encajar todas las partes entre sí. Dado que, como es obvio, semejante estado de cosas es humanamente imposible, A sólo puede tratar de lograr algún sustituto aproximado. En la práctica, el proceso consiste en una secuencia de interacciones entre el acto de hallar las partes y el de encajarlas entre sí.

G dice que su filosofía es, en líneas generales, una monadología leibniziana. El parece dar a entender que el incremento de experiencia humana durante un cuarto de milenio supone poca diferencia cuantitativa para lo que es filosóficamente esencial y que toda la tarea estriba en tratar de percibir con más claridad los mismos conceptos básicos. Según él, la filosofía analiza conceptos, en tanto que la ciencia los usa. Reteniendo esta diferencia en la mente, es probable que viera una analogía entre los esfuerzos por trascender a Platón y, por ejemplo, la solución negativa al problema griego de trisecar un ángulo por medios elementales (más de dos milenios más tarde). Esta idea tan atractiva del carácter perenne de las intuiciones y conceptos filosóficos básicos indica la estabilidad de ciertas preocupaciones humanas profundas y define un área de estudio que

goza de tranquilidad y continuidad. Es verdad que muchos de nosotros tenemos justificadas dudas de que la práctica de seguir de cerca todos los cambios y vueltas de la moda actual pueda ser realmente fructífera. Al mismo tiempo, algunos cambios importantes en la comprensión humana parecen afectar a nuestra perspectiva filosófica al cambiar nuestros principales intereses y al abrir nuevas perspectivas sobre los tradicionales.

Por ejemplo, la mayoría de los filósofos posteriores a Kant tienden a alejarse de la metafísica religiosa y, en especial, ven en la crítica kantiana de la tradición representada por Leibniz una cuestión previa a tratar. G se ha convencido a sí mismo, aparentemente, de que ni la filosofía ni la historia han presentado ninguna buena razón que justifique el apartamiento del enfoque leibniziano. En una dirección distinta, la física actual (y en lo referente a esto, la teoría de conjuntos), a diferencia de la física newtoniana, me parece que muestra que de lo que estamos más seguros no es de los fundamentos «últimos» ejemplificados por la búsqueda de una teoría unificada en física (o de una teoría de conjuntos más rica), sino de los niveles intermedios. Esta experiencia parece arrojar dudas sobre la creencia de G en la importancia de su propuesta axiomática para la filosofía. Por otro lado, aunque las ideas de Darwin, Marx y Freud contienen muchas dificultades no resueltas, es difícil ver cómo una filosofía globalizadora podría dejar de tomar en consideración algunas de sus sugerencias básicas.

G parece decir que, una vez que tenemos las ideas claras acerca de lo fundamental, el resto vendrá dado por añadidura. Yo tiendo a ver este tipo de proyección como otra forma de «reduccionismo». Al igual que las variantes de reduccionismo más conocidas, puede ser útil cuando se lo emplea con cuidado y como una guía heurística, como sin duda es el caso de G, pero su dudosa promesa de futuro no impide la viabilidad y conveniencia de enfoques alternativos. Me gustaría creer que el desacuerdo entre G y yo estriba no en los detalles, sino en que ambos estamos interesados en un aspecto de la filosofía distinto, al que, además, vemos como la dirección más prometedora para lograr un avance importante en la filosofía general. Dadas las muchas diferencias del medio en que hemos crecido, este tipo de desacuerdo probablemente era de esperar.

Sea A una persona que trata de encajar todas las partes o de hacer un resumen relativamente transparente de la experiencia humana acumulativa más asequible a lo que podríamos llamar la expe-

riencia privada «universal» de cada individuo. El resumen dependerá inevitablemente, en mayor o menor medida, del esquema concreto de la experiencia de A. Para poder llegar a un resumen, es obvio que hay que ampliar la limitada perspectiva de A con objeto de obtener una visión más clara de aquellas partes de la experiencia humana con las que A está menos familiarizado. Como la experiencia concreta de A se inclinará de uno o de otro lado, parece deseable suprimir su particularidad en atención a la objetividad. Al mismo tiempo, es esta particularidad la que confiere a los pensamientos de A un grado de «profundidad» y, en cuanto al proyecto de lograr una idea más global, aquello de lo que A es consciente es todo lo que A ha logrado en cada momento. En mi opinión, A debe tratar de hacer pleno uso de la experiencia concreta de A, de un modo precavido y crítico. De ahí que el proyecto global pueda verse en parte como una reacción ante el malestar que nos produce el hecho de que la mayor parte de nuestros esfuerzos intelectuales no logran usar y hallar un lugar para los variopintos componentes del batiburrillo de la experiencia de uno.

La senda hacia la ampliación de la perspectiva propia está sembrada de conocidos obstáculos. Las obras históricas y de ficción son más fácilmente accesibles, mas están escritas desde puntos de vista muy diversificados y sujetas a interpretaciones diversas. En los escritos más estructurados, la masa de detalles y jerga técnica es aplastante. Este obstáculo es más claro en las ciencias naturales y en las matemáticas, pero tienen la ventaja compensatoria de una mayor estabilidad, seguridad y diferenciabilidad (de las más fundamentales del resto, etc.). En las obras de carácter ampliamente filosófico, hay con frecuencia límites impenetrables impuestos por vocabularios específicos que, cuando se adquieren, parecen incrementar la capacidad que uno tiene de expresar los pensamientos nebulosos en la medida en que dan entrada a una especie de círculo coherente que está un tanto aislado tanto de la situación real como de las percepciones diseminadas que uno tiene de la misma. Esta naturaleza dual de brindar un poder aparente y privar de un foco más nítido es especialmente notoria en buena parte de las obras generales de la tradición alemana.

A necesita alguna base en desarrollo para seleccionar y digerir las partes aprovechables de los informes sobre los diversos aspectos de la experiencia humana, con vistas a encajarlas entre sí. La base evoluciona con la estructura de la propia conciencia de A así como

con la fuerza motriz derivada de sus previstos cursos de mejora de esta estructura para lograr una imagen global. No cabe duda de que incluye conceptos centrales tales como propósito, trabajo, valor, hecho, etc., las intuiciones de A acerca de ellos, y hechos tan centrales como la fuerza impregnante de la interacción entre deseo y realidad. Un componente más delicado de esta base lo constituye el criterio o patrón con que A cuenta para elegir o rechazar, de entre la multiplicidad de candidatos y con vistas a constituir un todo, aquellas partes que han de aceptarse como hechos y como hechos importantes (digeribles y comunicables) para el proyecto de A. Se requiere algún tipo de límite, frontera o censor que separe las creencias seguras de las menos seguras y que restrinja el dominio de lo que ha de considerarse con más detalle. Así por ejemplo, aunque las obras de Kant se ocupan de una amplia clase de tópicos, uno tiene la impresión de que se ciñe a pensamientos sobre (lo que él cree que son) las cuestiones más universales y permanentes. Dentro del ámbito de las creencias más seguras de A, un trabajo relativamente detallado de lenta transformación de las «últimas moradas» conferiría cierta estabilidad a la precaria búsqueda de un orden y ayudaría a encontrar un término medio entre el escepticismo y la credulidad. Semejante trabajo supone también una frontera movible demarcadora entre lo que ha de ser considerado o retenido y lo que puede descartarse.

Las «últimas moradas» puede suponerse que incluyen tanto ciertas cavidades de mayor certeza o claridad como linderos cambiantes establecidos por el sentido crítico de uno para delimitar lo que se acepta como aserciones justificables. Un modo de caracterizar estos límites estriba en asociarlos con el precepto de decir sólo aquello que es «preciso». Por ejemplo, los enunciados filosóficos publicados por G son breves y parecen invitar a interpretaciones y extrapolaciones variadas, aun cuando no por ello dejan de considerarse precisos, cualidad que es enormemente valorada por G y decisivamente importante en poesía (que suele ser más concisa que la prosa). Ser preciso equivale a ser «expresado estrictamente», a ser «definido con exactitud». A mi me gustaría pensar siguiendo la consigna, ¡Asegúrate de pintar únicamente lo que ves! Esto implica el requisito adicional de que uno pinta sólo lo que es capaz de «expresar estrictamente», porque de lo contrario uno no está *pintando* sino sólo tratando de pintar, lo que uno ve. Pero es muy difícil discernir o representar con claridad las propias limitaciones de uno, esto es,

«inventar un estilo de pintar capaz de representar lo que es, en este sentido, borroso». (Estoy relacionando la cuestión general de la precisión con las observaciones de Wittgenstein sobre Bacon; véase su *Culture and Value,* p. 68e, escrito en 1948.)

En la noción de precisión hay varias cuestiones entremezcladas. No tiene una correlación general con ser fácil de leer, ser detallado o explícito, o ser técnico. Por ejemplo, G quiere que la filosofía sea precisa pero no técnica. Sus escritos matemáticos son concisos pero no menos precisos que las exposiciones más largas que otros hacen de sus ideas. La cuestión crucial es que el lector cualificado pueda formarse, tal vez con esfuerzo, una composición de lugar correcta de las ideas esenciales. Como es natural, la noción de «lector ideal» recibe mucha atención en la teoría literaria. Pero en filosofía, los términos fundamentales y su uso, suelen ser esquivos y estar «cargados» y viciados. Está además el problema de representar lo borroso. A G le parecen perfectamente claros los conceptos de existencia, creación (BP, comienzo de la p. 271), percepción (de conceptos, *MP,* p. 85), etc., aún cuando con frecuencia se los considere ambiguos. Emplea expresiones como «debido a otro tipo de relación entre nosotros y la realidad» y «conferir significado a la cuestión» (BP, p. 272) para pintar lo que ve cuando éstos no son más específicos. También hace predicciones sin indicar su justificación (e.g. acerca del futuro de la filosofía, *MP,* p. 85). Un aspecto destacado de su concepto de precisión es su estrecha relación con la brevedad (el ser conciso). Por ejemplo, una experiencia conocida es que una larga carta embarullada no comunica tanto ni tan bien lo que uno quiere decir como una breve, cuidadosamente compuesta. Al mismo tiempo, quisiéramos que el autor, y G es un ejemplo típico, escribiera menos concisamente. Lo deseable es expresar exactamente lo que se ve en término de conceptos que uno ve con toda claridad. Pero para comunicar lo que se ve a otros que no entienden tan claramente esos conceptos se requiere algo más. G habla de enseñar a otros a ver los aspectos conceptuales del mundo, pero esto aparentemente requiere una forma de comunicación distinta de la seguida en sus escritos publicados.

La metáfora del ajuste de las partes sugiere la imagen de la solución de un rompecabezas que, al igual que los exámenes, establece una meta artificialmente limitada pero, a diferencia de ella, está fuera de las principales corrientes vitales. Si partimos de esta imagen concreta, podemos detectar en la búsqueda de un orden global

ciertos grados de diferenciación de ella. Las piezas no se ofrecen de una forma suficientemente precisa. Hay muchas redundancias y muchas piezas no fáciles de encontrar son necesarias. Los tamaños de las piezas varían mucho. Hay muchas soluciones alternativas (todas ellas imperfectas) del rompecabezas principal, soluciones cada una de las cuales ha de ser lograda a partir de soluciones provisionales de (jerarquías de) rompecabezas más pequeños que no encajan del todo entre sí.

Si A opta por resolver este formidable e indefinido rompecabezas, entonces tiene que elegir el material, forjar las piezas y buscar una guía de todas las fuentes disponibles. Es indudable que aquello que excita la imaginación de A cambia con el tiempo y con cada A concreto. Pero es de esperar que A reflexione sobre sus cambiantes imágenes para tratar de alcanzar un punto de convergencia estable que también a otros les resulte plausible y atractivo. Para ofrecer una ilustración de algunos de los pasos preliminares, haré una relación de algunas de las ideas que a mí me parecen sugestivas y que es probable que desempeñen algún papel en la prosecución de una perspectiva global. Una guía más útil tal vez pueda hallarse en la interpretación y reflexión sobre algunas reformulaciones subjetivas de ciertos aspectos seleccionados de algunas soluciones existentes que destaquen de uno u otro modo. Veo a esta luz mis propias reflexiones sobre los pensamientos de G, y éste es probable que haya sido también el propósito de su estudio de la obra de Leibniz y de Husserl. Más en concordancia con el espíritu de la época (que abarca uno o dos siglos), prefiero tomar como modelos las obras de Kant y de Marx y tratar de analizar algunas de las ideas sugeridas por ciertos aspectos de su obra, con vistas a examinar también lo que a mí me parecen dificultades todavía irresueltas.

La búsqueda individual de una concepción global por una persona A provee a A de un propósito unificador, pero es demasiado restrictiva en diversos aspectos. Hay muchas cosas de interés que pueden formar o pueden no formar parte de la posible formulación de la concepción global de A, si ha de haber una. Puesto que hay concepciones globales alternativas, ideas que no encajen explícitamente en el marco de A pueden ser útiles para otras soluciones. Por otro lado, el que A quiera sólo una única cosa no es ni natural ni sano. Generalmente, lo probable es que A esté acostumbrado al estudio de ciertas cuestiones menos globales por el interés que tengan y que tales estudios sean necesarios aunque sólo sea para avanzar

hacia la consecución de esta meta unificadora. Una consideración de más peso la constituye el atractivo proyecto de cooperar con otros, estén más interesados en cuestiones relativamente aisladas o en desarrollar sus propias concepciones globales.

Una perspectiva más amplia y fructífera estriba en cultivar el propio gusto intelectual y en servirse de su forma actual para reflexionar sobre distintas cosas que se considera que tienen una importancia estable y relativamente general. La interacción entre esta perspectiva y la preocupación unificadora puede verse como una instancia de la dialéctica entre la búsqueda de pureza y el continuo reconocimiento de que (cada fijación de) pureza no es suficiente. De este modo se amplía el ámbito de los propósitos significativos (o de últimas moradas anticipadas), más allá de la construcción de la mansión, para incluir también la reserva de ladrillos, la fabricación de adoquines y el trazado de pistas que llevan a anteproyectos y heurísticas. Entre las variantes de estas indefinidas categorías pueden figurar comentarios sobre alguna observación sugestiva, conceptos y principios atractivamente amplios, tareas y hechos brutos mal definidos, y proyectos de investigación que parecen prometedores. Permítaseme destacar algunos ejemplos para ilustrar lo que quiero decir y para dar alguna forma, al menos para mi propio beneficio, a ciertas imágenes de mi mente que, aunque esquivas, tienen un aspecto (tal vez engañosamente) tentador.

9.3. **Ladrillos, adoquines y pistas**

He llegado a creer que un pequeño número de amplios conceptos adecuadamente elegidos, junto con ciertos principios casi vacuos («semi-tautologías») sugeridos por ellos, pueden desempeñar un importante papel en la formulación de una perspectiva global. Esto tiene que ver con el interés tradicional en la búsqueda de una lista de categorías fundamentales (por ejemplo, por parte de Aristóteles y Kant) y de unos pocos grandes principios (como, por ejemplo, los leibnizianos de contradicción, razón suficiente, continuidad, etc.). Lo único que ocurre es que yo no soy capaz de ver por anticipado una clara lista completa o posibilidad alguna de asignar a los principios el estatuto más rígido de principios necesarios, analíticos, o *a priori*.

En otro sitio he considerado los principios que llamo de razón

necesaria y suficiencia precaria (*BA*, pp. 43-44, 57-58). Ahora prefiero llamar al segundo de estos principios de existencia mínima, tanto para indicar el gran hiato existente entre la mera subsistencia y una vida relativamente llevadera, como para contraponerlo al principio que me gustaría llamar de indulgencia máxima, que establece que el poder tiende a experimentar sus propios límites. Este principio no es sino una generalización del muy citado dicho de que el poder tiende a corromper, y el poder absoluto tiende a corromper absolutamente. También es aplicable a los suntuosos sepulcros de reyes y emperadores, a la arrogancia de las clases y países poderosos, así como a la tendencia de los activistas a reclamar demasiado para sí y su (justa) causa. En tales principios se hallan involucrados los conceptos de identidad (y diferencia), igualdad, existencia (o supervivencia), y poder.

El concepto de adecuación (casi vacuamente aprobatorio) proporciona un modelo y un ideal del ámbito más amplio de aplicabilidad. Un principio correspondiente podría ser: En todas las circunstancias se debe perseguir y tratar de conseguir lo que es adecuado. Contiene las doctrinas del (dorado) término medio de Aristóteles (en su *Ética*) y del Confucianismo (en los *Cuatro Libros*). Más ampliamente entendido, sugiere tanto la idea de conceder a cada cosa lo que se merece como el esfuerzo de ver cómo determinadas partes encajan entre sí, así como de hallar el modo de hacerlas encajar. Este principio es evasivo e ilimitado porque qué sea adecuado depende de qué se tome como partes, cosa que generalmente, por diversas razones subjetivas y objetivas, cambia con el tiempo.

El concepto de dialéctica se ocupa del cambiante aspecto de lo que es adecuado en el mundo objetivo y en las actividades humanas. Así por ejemplo, a medida que A avanza en su trabajo, lo que es (visto como) adecuado va cambiando con el estado en curso del trabajo. En la búsqueda de conocimiento, sujeto y objeto se hallan en un continuo proceso de adaptación mutua, y el proceso de tratar de conocer el mundo no se concluye nunca del todo. Si a la interacción de sujeto y objeto (o de un B y un C) la llamamos *negociación*, al intento de ver o de intervenir en la interacción (para interpretar, entender o cambiar el mundo) podemos llamarlo *arbitraje*.

Dado que las interacciones generalmente envuelven más de dos factores, la idea de negociación estriba en dedicar una atención especial a dos de ellos, pongamos B y C, y en tomar la acción de los factores restantes como una acción de arbitraje entre B y C. En ge-

neral, cuando una persona A observa, estudia, controla, o hace cosas por el estilo, la interacción entre B y C se puede decir de ella que está arbitrando su negociación. Así por ejemplo, lo formal y lo intuitivo se hallan en interacción en la investigación científica, la cual valora una mezcla adecuada o interacción entre ambas. En otro lugar me he ocupado de este caso de «arbitraje» en relación con la biología (*Perspectives in Biology and Medicine*, vol. 27, 1984, pp. 525-542). Un ejemplo es, «Podríamos decir que C. F. v. Gärtner abusó de lo formal no complementándolo con una dosis suficiente de lo intuitivo, en tanto que C. Nägeli insistió en exceso en lo intuitivo. Mendel fue capaz de lograr la mezcla correcta de ambas cosas y de descubrir las leyes básicas de la herencia» (p. 530).

Es un hecho significativo que una gran cantidad de nuestras contraposiciones conceptuales básicas está relacionada con, es análoga a, o tiene el aspecto de la contraposición entre lo formal y lo intuitivo. He compilado una larga lista (*ibíd.*, pp. 540-541), pero no he reflexionado en la importancia del hecho ni en las interrelaciones entre los diversos pares. En relación con ellos, podemos hablar metafóricamente de la necesidad de arbitrar la negociación entre ambos lados de cada par. He aquí la lista: 1) forma y contenido, seguir la regla y dar un brinco, método y juicio, público y privado, verificación y descubrimiento, explícito e implícito, repetitivo y único, externo e interno, mediato e inmediato; 2) objetivo y subjetivo, universal y particular (uno y muchos), abstracto y concreto, esencial y existencial, análisis y síntesis, consciente e inconsciente (ego e id), expresable e inexpresable, cuantitativo y cualitativo, analítico y descriptivo, eterno y culturalmente condicionado, argumentativo y contemplativo; 3) concepto e imaginación, teoría y experiencia, lógica y misticismo, ciencia y arte, estructuralismo y hermenéutica, reduccionismo y organicismo, materialista y vitalista, lógica formal y dialéctica, forma y materia, conocimiento y fe, local y global, cientificismo y humanismo (o articismo), hemisferio izquierdo y hemisferio derecho (del cerebro); 4) sentido y sensibilidad, seco y húmedo, belleza y amor, necesidad y libertad (o suerte), de talante pensativo y de talante emotivo, yang y yin, de talante ingenuo y de cabeza confusa.

La consideración del arbitraje que el biólogo hace de la negociación entre lo formal y lo intuitivo se ve, vagamente, como ilustrativa de una forma de conferir un contenido más tangible a las abstracciones filosóficas que guardan una clara relación. En este mo-

mento no tengo claro cómo encaja este estudio en el marco global que estoy persiguiendo. Pero me parece que no carece de valor para una investigación general de los distintos tipos de negociación entre lo formal y lo intuitivo que pueden considerarse el cometido central de la lógica.

Un examen más detallado de algunos de los conceptos fundamentales de algún área principal, que también suelen tener aplicaciones fuera de la misma, nos permite lograr una comprensión más concreta de esos amplios (y potencialmente más amplios) conceptos. Por ejemplo, las lecciones que se sacan de la biología se centran en la muy relevante contraposición entre selección e instrucción, real y posible, tolerancia y precisión, concurrencia y adaptación, todo y parte, etc. Familiarizándonos con cómo funcionan en biología, adquirimos una idea más firme de tales pares.

Cuando un dualismo (pongamos entre mente y materia) da lugar a dificultades irresolubles, el enfoque dialéctico rompe el impasse pero no ofreciendo una solución completa de las dificultades, sino mostrando que son «irreales» y convirtiéndolas en otras menos rígidas (más fluidas). Generalmente, la dialéctica de agrupar y separar sirve para esclarecer cada vez más ciertas cosas, mediante vueltas y revueltas que con frecuencia pueden resultar desconcertantes y que también sacan a la luz nuevas complejidades y confusiones. En cada situación, la consideración de si es más apropiado agregar o separar lleva involucrados muchos factores. Una sugerente contraposición entre las tradiciones china y europea la constituyen sus respectivas preferencias por agregar y separar. Aunque, en general, la gente prefiere la armonía al conflicto, al mismo tiempo es un hecho conocido que una apariencia de armonía esconde generalmente una buena dosis de conflicto. Con frecuencia es difícil decidir juiciosamente si y cuánto del conflicto oculto es apropiado sacar a la luz.

Cuando la cultura A decide tomar prestado de la cultura B, se busca un modo apropiado de hacerlo. Decir que A debe tomar sólo lo bueno de B y retener sólo lo bueno de A es un tanto vago, aunque sea cierto. Aunque generalmente tenemos una idea correcta de lo que es bueno tanto en A como en B, no tenemos el mismo conocimiento de las medidas efectivas para desembarazarnos de lo malo de A y adquirir lo bueno de B, e ignoramos especialmente las conexiones entre lo bueno y lo malo de A o de B. No cabe duda de que es necesaria una cierta dosis de experimentación mediante ensayo y

error, pero, para que esto sea efectivo y se puedan reducir los costes, hace falta una buena cantidad de conocimientos y reflexiones sobre un amplio panorama de cosas. Llegamos aquí a un tipo de preocupación vital de amplio alcance que se puede considerar que apunta a un afán de ver el mundo como un todo. Pero este afán tiende a excluir la separación, distanciamiento o paciencia necesarios para descubrir las cosas como son. El lugar de la filosofía en tales proyectos suele reducirse a la aplicación de cierto buen sentido práctico basado en una perspectiva amplia, o a un flexible mandato de alguna maltrecha y maleable ideología autorizada, más que verse como la prevención de necesidades de amplio alcance mediante algún estudio más amplio de algún tópico filosófico relevante y más estable (o universal).

En otro lugar (*BA,* pp. 209-211) me he ocupado del tema de la selección de buenos tópicos filosóficos (en el mundo de hoy). Es indudable que en el estudio filosófico especializado de filósofos concretos y disciplinas concretas hay muchos tópicos buenos. Pero sólo me ocupo de ellos en la medida en que pueden considerarse relevantes para el proyecto de formular concepciones globales destinadas a hallar una imagen del mundo actual. Este criterio es subjetivo e indefinido también en otros aspectos. Así por ejemplo, el interés de G en Leibniz me indujo a considerar algunos libros de éste, y a ver que su amplia discusión del *Human Understanding* de Locke tiene un interés especial en la medida en que despliega explícitamente su famosa capacidad para captar lo que de atractivo hay en distintas concepciones y para ajustarlas entre sí. De ahí que pueda sugerirse la utilidad de este libro para aprender a ajustar las partes entre sí.

La noción de G de método axiomático va desde luego más allá de la noción de sistema formal, ya que él considera, por ejemplo, la física newtoniana como un sistema (o teoría) axiomático. No entiendo del todo bien su noción, que también es central para el método que recomienda para hacer filosofía. Puede que sea conveniente por tanto, un mejor conocimiento. En cualquier caso, el «método» tiene la ventaja, en comparación con las definiciones explícitas, de ser más flexible a la hora de determinar y comunicar el significado de conceptos (o términos). Pero G no cree que un sistema axiomático sea una «definición implícita» del (los) concepto(s) del mismo, ya que se supone que es un informe de nuestras intuiciones (generalmente incompletas) del concepto y que se puede revisar y exten-

der. No define (ni fija completamente) el concepto, sino que más bien invita a introducir mejoras por comparación con la intuición cambiante. Esta situación está clara en el caso de los sistemas formales incompletos, que no son sino casos especiales (particularmente explícitos) de sistemas axiomáticos.

Un modo, para mí natural, de enfocar la filosofía es comparar el pensamiento chino y el occidental y reflexionar sobre sus interacciones, pues indudablemente envuelven cuestiones de interés filosófico. Estas interacciones no son simétricas. Como el resto del mundo, China ha sentido enormemente el impacto de un desarrollo único que se inició en Europa occidental, se propagó a Norteamérica y luego se difundió por todo el globo. Este desarrollo entretejido durante varios siglos abarca, en el aspecto intelectual, una nueva especie de racionalidad basada en la ciencia moderna y la Ilustración y, en el social, los nuevos estilos de vida, las instituciones de la democracia parlamentaria y la economía capitalista, y las doctrinas del liberalismo y el socialismo, todo ello decisivamente condicionado por las revoluciones política e industrial.

Este predominio de la cultura occidental hace difícil establecer una comparación realista de lo que pudiéramos considerar los respectivos méritos «intrínsecos» de los modos de pensamiento occidental y chino, comparación que tal vez pudiera adoptar la forma de una evaluación de sus respectivos logros futuros si a ambas culturas se les permitiera vivir su vida independiente durante otros mil años. Tal como son las cosas, para que alguno de sus componentes sobreviva, la cultura china tiene primero que llegar a un acuerdo con Occidente.

Por ejemplo, la era o movimiento simbolizado por la demostración del 4 de mayo de 1919 destacó la ciencia y la democracia como las dos fuentes principales de la diferencia entre las sociedades china y occidental. Este par de cosas fue suplido con la idea de socialismo y con la tarea urgente de resistir al imperialismo. Además ha estado el problema de evitar el capitalismo para ir directamente a una sociedad socialista. Estas cuestiones son relevantes para las más importantes divisiones del mundo actual: las existentes entre países capitalistas y socialistas, desarrollados y en vías de desarrollo, así como para la historia de Occidente durante los últimos siglos (especialmente en lo que se refiere al colonialismo y su base tecnológica).

Tradicionalmente, la cuestión de la bondad de la naturaleza hu-

mana es importante en el pensamiento chino. El conflicto entre las dos respuestas a esta cuestión ocupa un lugar tan central como el ocupado en Occidente por las de racionalismo/empirismo o idealismo/materialismo. La cuestión es políticamente importante porque está relacionada con la opción entre persuasión y coerción. En 1950, C. Brinton escribía que el liberal se halla «enfrentado a una verdadera pregunta: ¿Confío o no confío en el saber y la buena voluntad del hombre común? El no puede estar seguro. Su duda [es importante para la política contemporánea y] tiene raíces históricas, que se remontan al menos hasta la Ilustración» (*The Shaping of the Modern Mind,* 1953, p. 137).

China carece del pleno desarrollo correspondiente al aspecto «no-mundano» de la filosofía griega o al sistema «ultra-mundano» de la teología cristiana. La idea de contacto directo con Dios y con la razón puede incluso considerarse como un impulso fundamental hacia las ideas de igualdad y democracia. Una vez que se favorece un contacto directo con Dios, el individuo y su apelación directa a la razón se consideran esenciales. De ahí que uno busque entender la relación no sólo del individuo con sus grupos sociales, sino también con el universo. Por otro lado, la ciencia y la religión parecen ambas fomentar más las reflexiones directas sobre el universo que el intento de perfeccionar una cosmovisión presente en la tradición confuciana, básicamente condicionada por la jerarquía (existente) de grupos sociales.

El lugar central de la política en la filosofía china parece concebir al emperador a la vez como un mensajero de Dios y como un sustituto de una mezcla del papa con Carlomagno. La importancia de las relaciones familiares se refleja en el hecho de que se denomine al emperador el *hijo* de los cielos; cuando Hong-Hsiu-Chuan decidió servirse de una forma de la religión cristiana para su ambición política, afirmó ser el *hermano* más joven de Cristo. (El emperador es también el dragón, el agente que produce la lluvia, siendo esto un reflejo del importante papel de la lluvia en una sociedad agrícola con condiciones climáticas un tanto adversas.)

Las dos cuestiones básicas acerca del pensamiento chino son qué puede aportar al mundo de hoy y cómo puede asimilar el pensamiento occidental (o moderno). Una doctrina en boga hoy es que la reconocida superioridad actual de la gestión económica japonesa debe mucho al confucianismo. Como desconozco los hechos relevantes, no puedo pronunciarme sobre si esta creencia encierra algu-

na verdad. En un nivel más universal, lo que generalmente se recomienda incluye fundamentalmente el confucianismo, de un lado, y de otro, Chuang Tzu combinado con el Ch'anismo (o Zen, la influyente versión china del budismo). Algunos destacarían sus ideas más sutiles, tal vez para sugerir que el pensamiento chino no es menos refinado y profundo. El aspecto más destacado lo constituye, desde luego, su preocupación casi exclusiva por lo «cis-mundano». No parece irrazonable esperar poder extraer lecciones provechosas acerca de las relaciones humanas de Confucio y acerca del cultivo de un «espíritu libre» de Chuang Tzu. Es especialmente notable la importancia del componente estético tanto en los escritos de Chuang Tzu como en sus recomendaciones acerca de cómo vivir la propia vida. Confucio puso un gran énfasis en la música, entendida en sentido amplio. De hecho, música y placer están tan estrechamente relacionados que los términos chinos para designarlas emplean el mismo carácter, aunque con distinta pronunciación (yüeh y lo).

Según M. Foucault, en el comportamiento sexual, la fórmula griega destaca «actos», la fórmula moderna subraya «deseo» («dado que uno ha de liberarse de su propio deseo»), mientras que la fórmula china destaca «placer». «Los actos son puestos a un lado porque uno tiene que refrenar los actos con el fin de lograr la máxima duración e intensidad de placer» (*The Foucault Reader,* ed. P. Rabinow, 1984, p. 359). Estas generalizaciones empíricas, tan sugestivas y sensacionalistas, son difíciles de probar o refutar, ya que su significado no está del todo claro. Distintos lectores pensarán en distintos fragmentos de los datos «relevantes» y los interpretarán de modo distinto, dando por supuesto que son «verdaderos» en algún sentido significativo.

Me siento inclinado a seleccionar una interpretación que tiene la siguiente propiedad. Si Foucault tiene razón, entonces la fórmula china sería la más civilizada conforme a la interpretación que Kant hace de la hoja de higuera del Génesis: «En el caso de los animales, la atracción sexual es meramente una cuestión de impulso pasajero, la mayoría de los casos periódico. Pero el hombre descubrió enseguida que él puede prolongar e incluso aumentar esta atracción por medio de la imaginación —capacidad ésta que cumple su cometido, sin duda, tanto más moderadamente, pero también más constante y uniformemente, cuanto más apartado está su objeto de los sentidos» (*On History,* ed. L. W. Beck, 1963, p. 57).

Este ejemplo, lo mismo que la conocida superioridad de la cocina china, parece apuntar a la gran dosis de sentido y sensibilidad que la cultura china podría aportar al mundo, sólo que, a diferencia de lo que ocurre con la cocina, los refinamientos menos concretos lo más probable es que se vean barridos por la tendencia del mundo a identificar progreso con modernización, cosa que, a su vez, se identifica con occidentalización. Por añadidura, está también la difícil tarea de contrapesar estos refinamientos con los costes que conlleva, bien su retención, bien su adquisición. Dado que estos refinamientos forman parte integrante de una cultura que hasta la fecha no ha sido capaz de afrontar de un modo totalmente satisfactorio el desafío occidental, uno se siente inclinado a adoptar la actitud negativa de tomarlos como algo a lo que hay que renunciar en aras del «progreso». Mas, sin duda, este tipo de cuestión sólo es susceptible de ser considerada de un modo significativo en un contexto más concreto.

Los chinos están deseosos de adquirir la ciencia y la democracia, así como los pensamientos filosóficos relacionados con estas cosas. En el terreno del pensamiento, hay dos destacados profesionales que han expresado sus dudas de que los pensamientos de fuera puedan seguir viviendo en China sin una drástica reformulación, sirviéndose ambos del auténtico, aunque no influyente trabajo de Tripitaka (Hsüan-tsang) para ilustrar la cuestión (Wang Kuo-wei en torno a 1904, en su «Sobre el mundo del aprendizaje en los tiempos recientes», y su joven amigo Tschen Yinko en su informe arbitral de 1934 sobre la *History of Chinese Philosophy,* II de Fung Yu-lan). Tschen dice más explícitamente que «incluso en caso de que los pensamientos de Norteamérica y Europa oriental fueran fielmente importables», no sobrevivirían mucho tiempo; él tiene la esperanza de que en China sólo pueda llegar a implantarse algo que se corresponda con la religión taoísta y el neo-confucianismo, desarrollados en la Edad Media, que absorbieron algo del budismo pero permanecieron fundamentalmente dentro de la vieja tradición china. Yo, sin embargo, tiendo a disentir de ellos en la medida en que considero pertinente para la filosofía una mayor separación de la tradición china, por cuanto que los cambios económicos y políticos son y seguirán siendo cualitativamente distintos de los cambios más o menos cíclicos acaecidos entre 221 a. C. y 1840 d. C.

9.3.1. *Lo posible y lo real*

Según G, el concepto de existencia, en su sentido más débil (amplio), es uno de los conceptos primitivos más claros que tenemos; sentidos más fuertes requieren cualidades adicionales, tales como la acción. En consecuencia, tenemos distintos sentidos de lo real y lo posible. Las matemáticas, como dice Bernays, estudian estructuras idealizadas posibles que pueden existir o no existir (realizarse) en el mundo físico. En este sentido de existencia, la teoría de conjuntos no puede ser verdadera en todos los mundos posibles porque sólo ciertos conjuntos (en especial, estructuras) se realizan o al menos se toman seriamente como «modelos» (partes) del mundo concreto. Pero los conjuntos se toman como existentes en un amplio sentido de la palabra y los mundos posibles pueden ser contrapuestos a los reales o existentes conforme a un sentido más fuerte de existencia. Es esa interacción de conceptos más amplios y más estrictos de lo real y lo posible la que nos permite esperar poder hallar un sentido adecuado en el que poder decir que la teoría de conjuntos (y también la teoría de los conjuntos puros, aún por desarrollar) es verdadera en todos los mundos posibles. Esto está relacionado con la conocida idea de que la aritmética sigue siendo verdadera aun cuando ya no resulte aplicable en ciertos mundos imaginados.

En un sentido distinto, buena parte del arte y la literatura estudia también estructuras idealizadas posibles. Determinar cuál sea este distinto sentido constituye un problema importante. Pero esta sugerente analogía incluye ciertas ideas familiares. Puede considerarse que una importante función de la imaginación es captar posibilidades idealizadas. Por definición, la ficción no tiene por finalidad dar cuenta literal de lo real; no obstante, lo absolutamente imposible no tiene tampoco demasiado interés. Un lector normal de una novela generalmente la ve como un despliegue de ciertas posibilidades imaginarias. Aunque buena parte del arte puede decirse que tiene el propósito de comunicar una experiencia interna real, la propia experiencia interna puede ser tomada como una idea de alguna estructura idealizada posible, y uno puede sentirse más a gusto diciendo que el objeto que ha de comunicarse es no la experiencia, sino la estructura.

La preocupación por lo posible y sus límites desempeña un papel destacado en todas las facetas de la actividad humana. Cuando tratamos de comprender el mundo, buscamos el modo de estrechar

los límites de lo conceptualmente posible con objeto de ver sólo a una determinación de lo real (que identificamos con lo necesario), especulativamente, como el mundo «mejor posible», o más detenidamente, como una física «completa» que elimina todas las estructuras idealizadas posibles salvo la que va a tomarse como la estructura real del mundo. (Si hubiera semejante física, entonces la interacción de hecho y fuerza en la naturaleza se vería como siguiendo un curso completamente «material», con lo que habríamos de aceptar un reino de la mente separado del de la materia o conceder que nuestra sensación de libre albedrío es una ilusión total.) De otro lado, la historia humana, la biografía de un individuo, o la dialéctica de deseo y realidad, aunque constantemente frustrada por (el reconocimiento de) los límites de lo posible, propende en todo momento también a expandir el ámbito de lo posible.

En el mundo de los seres vivos, aunque existe un gran número de especies (varios millones) y de variedades individuales, éstas no suponen más que una pequeña parte de lo que, de acuerdo con el estado actual del conocimiento, constituye el ámbito de lo posible. La idea de lucha por la supervivencia introduce un sustituto parcial para el postulado de cierto plan cósmico insondable y añade un factor histórico que elimina algunas de las posibilidades que, de lo contrario, serían realizables conforme a las reglas (internas) de reproducción. Generalmente, en el mundo, los objetos más simples se unen para formar otros más complejos, pero sólo una pequeña parte de las combinaciones matemáticamente posibles se realizan (pasando, pongamos por caso, de átomos a moléculas, y de éstas a células y especies animales). Para entender el hiato existente entre lo posible y lo real lo que hay que buscar son los *constreñimientos* impuestos, además de por circunstancias históricas, por factores psicomédicos y biológicos. (Consúltese F. Jacob, *The Possible and the Actual,* 1982, pp. 30-32.)

Jacobs expresa la importancia de los límites de lo posible en la vida social del siguiente modo (*ibíd.,* p. vii): «Tanto en un grupo social como en un individuo, la vida humana supone siempre un diálogo continuo entre lo posible y lo real. Una mezcla sutil de creencia, conocimiento e imaginación coloca ante nosotros una imagen siempre cambiante de lo posible. Es sobre esta imagen sobre la que moldeamos nuestros deseos y temores.» También insiste en la relevancia de la historia «hasta para la física» y más especialmente para las cosas biológicas. «A medida que aumenta la complejidad, la his-

toria desempeña un papel cada vez mayor» (p. 31). Naturalmente, por historia se entiende en primer lugar historia humana. Tradicionalmente, la historia en tanto que estudio de lo real, tiende a dedicar más atención a un pequeño número de individuos concretos excepcionales y de acontecimientos espectaculares. Pero el modo en que vive la gente común en un determinado periodo histórico aporta más información sobre él al revelar cómo se realizaron de hecho posibilidades no excepcionales en circunstancias temporales también no-excepcionales. Los eventos e individuos excepcionales se puede decir que son más accesorios por cuanto que resultan más difíciles de predecir al depender más de combinaciones de factores no comunes o atípicas.

F. Braudel inicia su estudio de la civilización y el capitalismo (de los siglos XV a XVIII) con un volumen titulado *La estructura de la vida cotidiana: Los límites de lo posible* (1979, trad. inglesa 1981). En él considera unos cuantos vocablos *parahistóricos* de este periodo: demografía, alimento, vestido, alojamiento, transporte, tecnología, dinero y ciudades. Habla también de una barrera que separa en todas las épocas lo posible de lo imposible. Uno de los límites del mundo preindustrial lo constituye el gran espacio ocupado por la «vida material»: existencias alimenticias inadecuadas, población demasiado grande o pequeña para los recursos con que cuenta, baja productividad laboral, falta de medios de control de la naturaleza, y lentitud en el cambio cualitativo de tales constreñimientos.

Ciertamente, la vida cotidiana no es el único indicador de los límites de lo posible. Por ejemplo, la idea kantiana de los límites de la experiencia posible puede tomarse como un aspecto abstracto de la idea, más rica y concreta, de los límites de lo posible, idea que sugiere un estudio sistemático para determinar tanto como se pueda lo que es humanamente posible lograr, incluidas las posibilidades de mejora de sociedades y formas de vida. A medida que nos hacemos más conscientes de los constreñimientos, logramos una imagen más clara de los límites de lo posible. Pero quedan muchas alternativas que no se consideran imposibles, y los cálculos probabilísticos son muy poco fiables en el terreno de lo humano. En la práctica, generalmente nos preocupamos de los límites de lo posible en situaciones muy concretas con vistas a ayudarnos a tomar decisiones y a establecer metas. En lo que a los estudios teóricos se refiere, la atractiva idea de límite sugiere una gama ilimitada de direcciones que requieren distintos métodos de investigación y prometen resultados

de muy distinto grado de claridad. Así, por ejemplo, los límites de las construcciones geométricas elementales y de la computación teórica han sido determinados de modo concluyente, pero los de las computaciones realizables, los de la definibilidad o los de la demostrabilidad son mucho más difíciles de establecer. La teoría de conjuntos puede considerarse también como el estudio de los límites de estructuras idealizadas posibles. El estudio histórico que Braudel ha hecho de los límites del mundo preindustrial recuerda uno de los más formidables proyectos marxistas: el de la determinación de los límites del capitalismo. En filosofía, aparte de la noción kantiana de experiencia posible, está la noción de lo expresable, expuesta en el *Tractatus;* parece, sin embargo, que los filósofos ya no buscan tan amplios conceptos unificadores.

He considerado las limitaciones (y he hecho alusión a las posibles extensiones) del excesivamente simplificado modelo del mundo retratado en el *Tractatus,* el cual se caracteriza sobre todo por conceder a la lógica un puesto central *(BA,* p. 75-100). Tan pronto como reemplazamos las simplificadoras suposiciones del modelo por aproximaciones más realistas a nuestra intuitiva imagen, mucho más rica, del mundo, nos encontramos con modelos que son más complejos y menos transparentes. Los modelos más fructíferos han de ser adecuados, entendiendo por tal que capten y ordenen nuestras intuiciones más amplias, a la vez que conservan un grado de complejidad manejable. Cuando contemplamos las idealizaciones interrelacionadas del *Tractatus,* vemos que hacen sitio al valor, relegándolo al dominio de lo «inexpresable», igual que Kant se lo hace a la fe, colocándola más allá del dominio de la razón teórica pura.

Una vez que hecho y valor son tajantemente separados y que se deja fuera el valor por estar más allá de la teoría, resulta más fácil adoptar postulados drásticos, que, no obstante, son irrazonables hasta para el restringido dominio de los hechos libres de valor. Si queremos hacer más justicia a este restringido dominio, tenemos que cuestionar los siguientes postulados adoptados en el *Tractatus:* la representabilidad absoluta del pensamiento por el lenguaje y del mundo por el pensamiento, la adecuación de un solo tipo de cosas, la exclusión de intensiones e intenciones, la homogeneidad de lo finito y lo infinito, y la independencia de las proposiciones elementales. Así por ejemplo, en lugar de un solo tipo de cosas, parece que necesitamos tanto conceptos como objetos. Para una filosofía más

adecuada, puede que también deseemos tomar como categoría básica las imágenes. Una vez que tenemos en cuenta los conceptos, nos vemos llevados a preguntarnos si los grupos y cambios de conceptos pueden tratarse adecuadamente como meras apariencias o como derivados de conceptos precisos. En especial, podemos plantearnos también si el estudio de grupos y cambios forma parte de la lógica si adoptamos la sugerencia de G de considerarla como una teoría de conceptos.

Si queremos partir de un modelo menos complejo, podemos tratar de liberar el *Tractatus* intentando desarrollar una teoría análoga en la que la lógica resulte ser la teoría de conjuntos, que es un área relativamente bien desarrollada y que, por ende, ofrece una guía más clara que otras concepciones aún más amplias de la lógica (tales como la de G o la de Hegel). Sería, por ejemplo, gratificante hallar un atrayente concepto de mundo posible que permita ver la teoría de conjuntos como verdadera en todos los mundos posibles. La parte del mobiliario del mundo explícitamente reconocida ha de ser expandida más allá de lo que está en el *Tractatus*. La incompletabilidad de la teoría de conjuntos (o incluso de la teoría de números) requiere una noción más compleja de la relación entre lenguaje y pensamiento. Y así sucesivamente. (Para más cosas sobre el *Tractatus*, véase *BA*, cap. 2.)

9.4. **Notas y observaciones adicionales**

La búsqueda y presentación de una concepción más global puede entenderse de muchas maneras. Aspira a enunciar, de un modo u otro, bien lo que A cree de hecho, bien lo que considera que es racional creer. Esta enunciación puede estar o no estar bien organizada, ser breve o amplia, pedestre o estimulante, etc.; las creencias pueden ser conocidas o nuevas, débiles o poderosas, poco entusiastas o persuasivas, etc.

Hay colecciones de resúmenes o citas escondidas bajo títulos como *Lo que yo creo* y *La sabiduría de Occidente*. (Un ejemplo es *The Viking Book of Aphorisms*, seleccionados por W. H. Auden y L. Kronenberg, 1962.) Aunque tales colecciones pueden ser informativas, difícilmente pueden revelar una concepción global coherente. Es sabido que G encontró penetrantes citas en sus lecturas preferidas (Kant, Husserl, Fichte, Schelling, Hegel, etc.). Por ejemplo, a co-

mienzos de los años treinta, cuenta Menger, «me mostró un pasaje [de un libro de Hegel] que parecía anticipar por completo la teoría general de la relatividad» (véase la memoria de Menger). Pudo haber hecho una relación de tales pasajes. «La publicación de una antología de este tipo probablemente hubiera producido una revolución menor en filosofía» (Kreisel, p. 218). Cabe pensar que una colección bien organizada de citas bien seleccionadas con comentarios apropiados puede ser un modo razonablemente efectivo de expresar la concepción global de uno, pero no sé de ningún intento serio de hacer esto. Lo que suele hacerse normalmente es reescribir la obra de otros desde la propia perspectiva; por ejemplo, la *Historia de la filosofía* de W. Windelband puede verse como una interpretación de su propia filosofía. En cambio, Montaigne, en sus *Ensayos,* presenta informalmente una concepción global anotando reflexiones sobre sus lecturas y experiencia personal.

A Herbert Spencer, Oswald Spengler, y Arnold Toynbee se los conoce por sus esfuerzos por sintetizar la experiencia humana. Pero de su obra se piensa que carece de la suficiente precisión como para que se la pueda considerar como filosofía o filosofía seria. En *BA* (pp. 53-56) he considerado el programa baconiano de una *instauratio magna,* que es difícil de ejecutar y difícil de evaluar antes de la ejecución. Descartes y Husserl persiguieron reconstrucciones globales del conocimiento humano que transformarían la filosofía en una ciencia. Los «principios» presentados por ellos han sido objeto de mucha atención en el desarrollo de la filosofía. Kant, Hegel y Marx son más sistemáticos, de suerte que su obra transciende la pura concentración en métodos y fundamentos.

Si la filosofía se considera que es el estudio de lo que es racional, entonces las vagas categorías de razón técnica (o instrumental), humanista y revolucionaria requieren todas ellas ser consideradas. Debido a la tendencia dominante a restringir la atención a los más claros y sorprendentes avances en el campo de la tecnología computacional, la perspectiva consistente en considerar la razón en términos de las capacidades de las máquinas ha recibido atención en los recientes decenios. Este estudio se conoce con el nombre de inteligencia artificial (en abreviatura, AI), y, desde luego, resulta relevante para el deseo de G de separar las mentes de las máquinas.

Dado que AI está interesada primordialmente en lo que es computable, el aspecto matemático no entraña más que una muy

pequeña parte de las matemáticas (y de la lógica). Lo que está en consideración no es, sin embargo, el dominio objetivo de los objetos matemáticos, sino la capacidad humana de ocuparse de ellos (y de otras cosas). De ahí que las limitaciones de AI no puedan demostrarse mediante esta fácil observación acerca de su muy restringido objeto de estudio en el sentido idealizado. El centro de atención es más bien lo que es posible en la práctica. Por ejemplo, resulta más relevante señalar que la gente tiene mejor sentido del «orden de magnitud» que los computadores, aunque sean más propensos a cometer errores en detalles complejos. No faltan la idea y la práctica de dejar la manipulación de detalles para otros (y para los computadores).

En cierta ocasión le pregunté a un colega, «¿Cómo podemos introducir lo inconsciente en los computadores?». «Yo diría», me respondió tras una pausa, «que los computadores son (totalmente) inconscientes». En tanto que apéndice inconsciente de nuestra consciencia, los computadores difieren radicalmente de la inconsciencia humana en el hecho de que entendemos mucho mejor cómo funcionan los computadores que cómo funciona nuestra consciencia, cosa que a su vez entendemos mejor que cómo funciona nuestra inconsciencia. De ahí que mi pregunta sea prematura, dado que aún no sabemos cómo introducir la consciencia en los computadores. La importancia de lo inconsciente para la creatividad es un hecho conocido. (Por ejemplo, J. Hadamard, en su *Psychology of Invention in the Mathematical Fiel,* 1945, discute ejemplos destacados con referencia a Mozart, Helmholtz, Poincaré, P. Valéry, etc., y a estudios afines tales como *Art of Thought* de Graham Wallas, 1925). Se puede decir que lo que procede es una negociación entre el ego y el id, que frecuentemente adopta una forma relajada que depende más de la disposición general de la mente que del ejercicio consciente de la voluntad.

Freud formuló el concepto de id en su *El ego y el id* (1923). Este concepto recuerda el de la voluntad de la filosofía de Schopenhauer (en tanto que desarrollo del noúmeno kantiano), así como el de lo Dionisíaco del primer Nietzsche e incluso el del sustrato material de Locke. Aunque los contenidos (de los instintos últimos de Eros y Thanatos) del id son en sí mismos totalmente inconscientes, las partes inconscientes del ego y el superego se hallan también incluidas en el dominio de lo inconsciente. «El ego», dice Freud en esa obra, «es primordial y fundamentalmente un ego corporal». Estas

importantes sugerencias indican todas ellas la complejidad de nuestro proceso de pensamiento, lo cual implica importantes dificultades a largo plazo para las más ambiciosas metas de AI.

Según Leibniz, en la mente hay presentes percepciones insensibles, insignificantes, confusas, además de actitudes y hábitos naturales o adquiridos... El análisis llevado a cabo en sus *Nouveaux Essais* (1704, publicados en 1765, traducidos parcialmente en R. Latta, *The Monadology and Other Philosophical Writings,* 1898) contiene las siguientes observaciones. «Hay en nosotros en todo momento una infinidad de *percepciones,* pero que se dan sin apercepción y sin reflexión; es decir, cambios en el alma de los que no somos conscientes [s'apercevoir]» (Latta, p. 370); es a causa de esas percepciones inconscientes por lo que «el presente es un todo con el futuro y está cargado de pasado, por lo que hay una conspiración de todas las cosas», y «estas también indican y constituyen la identidad de lo individual» (p. 373). «En una palabra, las percepciones inconscientes tienen una utilidad tan grande en la pneumática [filosofía de la mente] como los corpúsculos imperceptibles [partículas elementales] en la física, y es irracional rechazar tanto lo uno como lo otro sobre la base de que están más allá del alcance de nuestros sentidos» (p. 376).

G prefiere claramente Platón a Aristóteles y Leibniz a Kant. En ambos casos, los últimos filósofos son más explícitos (o articulados) y sistemáticos, pero menos sugerentes y, yo creo que G diría también, que menos (cercanos a lo que es) verdaderos. Kant separó el intelecto, la voluntad y la sensación humanas, sobreponiéndoles una tenue unidad, y dio una estructurada formulación de la cosmovisión «moderna». La formulación pretende reconciliar la necesidad (de la naturaleza) con la libertad (humana), y revela de una forma clara el dualismo implícito en la concepción que él hizo así más explícita. Dios, el designio (causa) último, la inmortalidad, el universo como un todo y en sus detalles más sutiles, etc... todo ello se encuentra en el dominio de la cosa-en-sí, que no es cognoscible por el intelecto humano, pero que se manifiesta, si bien sólo débil y parcialmente, a nuestra voluntad y sensación.

Kant cifró lo que conecta a todos los individuos en sus pensamientos y acciones (para constituir su imperfecta comunidad) en lo que tienen en común en cuanto a su intelecto (la intuición pura del espacio y el tiempo y las categorías del entendimiento), voluntad (el imperativo categórico) y sensación (el *sensus communis).* Pero los in-

dividuos están separados por factores contingentes que difieren de individuo a individuo y hacen de ellos «animales sociales asociales»: sensaciones, inclinaciones, intereses egoístas. En su «Idea en favor de una Historia universal» (1784) Kant habla del «plan secreto de la Naturaleza» para producir una comunidad perfecta o un reino de libertad (o un reino de Dios en la tierra) y afirma que «la Idea puede contribuir, aunque no sea más que de lejos, a hacer que el milenio llegue». Por lo demás, «Basándonos en la premisa fundamental de la estructura sistemática del cosmos y en lo poco que se ha observado, podemos inferir con toda seguridad la realidad de semejante revolución», y «parece que nuestra acción inteligente puede asegurar este tiempo feliz a la posteridad» (*On History,* ed. L. W. Beck, 1963, p. 22). Pero Kant no dio más indicaciones de cómo o por qué la comunidad imperfecta acabará dando lugar o acercándose a una perfecta. Según Lucien Goldmann (*Immanuel Kant,* 1971, p. 224), la comunidad perfecta era para Kant una de las «ideas suprasensibles que el hombre no podrá realizar nunca aquí en la tierra a través de su voluntad y de su acción. Es precisamente debido a que el hombre *tiene que* tender hacia ellas, hacia los únicos valores espirituales reales, sin ser capaz de alcanzarlos nunca, por lo que la existencia humana es trágica». Esta afirmación de imposibilidad parece, sin embargo, contradecir la aserción kantiana que acabo de citar.

El reino de la libertad es un ideal que en cierto modo está presente en la mente de cada uno. No es sorprendente, pues, que la propuesta de Marx que prometía no sólo la emancipación de la clase obrera sino también un acercamiento a este elevado ideal haya tenido y tenga tan amplia aceptación. La propuesta incluye una idea general plausible de historia y un análisis exacto de la sociedad capitalista. La tesis crucial y más especulativa tal vez sea la identificación de la fuerza dinámica de la historia humana con el proletariado, que se considera que es una clase más o menos homogénea de individuos que comparten una serie de propiedades específicas, idealmente idóneas para este gran papel. La situación es análoga a la de la propuesta de una solución para un conjunto muy complejo de ecuaciones.

Una caracterización adecuada del proletariado parece incluir los siguientes rasgos. La clase hace la mayor aportación a la sociedad, pero está explotada y oprimida. Constituye la práctica totalidad de la fuerza del trabajo. A sus miembros sólo se les permite vivir en el nivel de subsistencia y no «tienen nada que perder más que sus

cadenas». Al mismo tiempo, se instruyen o pueden instruirse para hacerse cultos, solidarios y altruistas; sus sentimientos son internacionales. El deseo de la clase coincide con las aspiraciones de la humanidad como un todo y ella tiene la capacidad de superar la separación entre deseo y realidad. No es sino el «sujeto-objeto idéntico de la historia».

Durante muchos años, Marx y sus seguidores creyeron que la clase obrera de diversos países de Europa occidental satisfacía en una gran medida, potencialmente o de hecho, tales condiciones. La experiencia histórica ha demostrado que éste no era del todo el caso y que no poseemos un conjunto simple de ecuaciones para la fuerza dinámica (desconocida) que admita como solución un grupo de individuos reales determinable en este momento. Hoy es un hecho conocido que el nacionalismo sigue siendo una fuerza poderosa y que la clase trabajadora ha devenido menos homogénea y no tan uniformemente empobrecida. G. Lukacs, en su famoso ensayo «La reificación y la conciencia del proletariado» (publicado por primera vez como el ensayo más importante de su *Historia y conciencia de clase,* 1923) brindó un extenso análisis en términos filosóficos. En 1967, en el prefacio a una nueva edición, criticó su idea de la conversión del proletariado (entendiendo por tal su conciencia de clase) «en el sujeto-objeto idéntico de la historia». «¿Pero es aquí en realidad el sujeto-objeto idéntico algo más que un puro constructo metafísico? ¿Puede crearse un sujeto-objeto verdaderamente idéntico mediante el autoconocimiento, por adecuado que sea, y por basado que esté en un conocimiento adecuado de la sociedad, *i.e.,* por perfecto que sea semejante auto-conocimiento?»

Aunque no tenemos una idea clara de cómo enfocar el inalcanzable reino de la libertad, este ideal un tanto indefinido conserva en cierto modo su impacto sobre el desarrollo histórico. Cuando un aspecto del mismo se convierte en una demanda y una expectativa para nosotros en un momento determinado, se imponen tareas concretas que requieren más atención de nuestra parte debido a su presunta conexión con él. Por lo demás, el ideal sirve en cierto modo como norma por la que juzgar una determinada forma de sociedad y mostrar una venidera.

Aparte de la desigualdad entre las diferentes clases, hoy somos muy conscientes de las grandes desigualdades entre distintos países, diferentes razas, como también entre hombres y mujeres. Tocqueville creía que el mundo camina y debe caminar hacia la igualdad,

aunque él parecía ver el proceso y el panorama con cierto recelo por cuanto que lo califica de proceso de «nivelación». De acuerdo con lo que llamo «el principio de razón necesaria», esto parece indicar que hay una tendencia natural a avanzar hacia la igualdad (a largo plazo). Después de todo, toda desigualdad requiere una explicación, y cuando las diferencias tienen explicaciones realmente satisfactorias, ya no son desigualdades. Por lo demás, las desigualdades más notorias no tienen explicaciones convincentes, por no decir concluyentes.

La unificación de cielos (t'ien) y persona (jen) es un tema central de la filosofía china. Un análogo o instancia de tan vaga idea sería el tema de la unificación de naturalismo y humanismo. Así por ejemplo, Marx, en los *Manuscritos* de París, dice «Vemos aquí cómo el humanismo o naturalismo consistente se distingue tanto del idealismo como del materialismo, constituyendo al mismo tiempo la verdad unificadora de ambos» (*The Economic and Philosophic Manuscripts of 1844,* ed. D. J. Struik, 1964, p. 181). Desde luego, vemos el mundo a través de nuestros sentidos y construimos nuestra imagen del mundo con ayuda de la mente. A partir de la experiencia acumulada, creemos que hemos logrado imágenes más o menos adecuadas que serán objeto de continuas mejoras. En un lenguaje característico de la época, Marx señala más adelante que el proceso hegeliano de sustitución del pensamiento por el pensamiento «ha de tener un portador, un sujeto» (p. 188). «La abstracción que se abarca a sí misma como abstracción sabe que por sí sola no es nada: tiene que renunciar a sí misma —renunciar a la abstracción— para llegar así a una entidad que es precisamente su opuesto —la *naturaleza* (p. 189). De ahí que la negación de la naturaleza lleve a su afirmación. Pero la *naturaleza,* tomada abstractamente, en sí misma —es decir, fijada aisladamente del hombre— no es tampoco *nada* para el hombre» (p. 191).

La *percepción sensorial* (véase Feuerbach) ha de ser la base de toda ciencia. Sólo cuando procede de la percepción sensorial en la doble forma de consciencia sensorial y necesidad sensorial —es decir, sólo cuando la ciencia procede de la naturaleza es *verdadera* ciencia (p. 143). La necesidad se traduce en el elemento práctico que está en la raíz de toda investigación. Por otro lado, la necesidad, en tanto que hecho natural también es la fuente de todos los valores humanos, tanto morales como estéticos. La doble forma de la percepción sensorial mezcla desde el comienzo los elementos que llevan a

la verdad, la bondad y la belleza. La percepción sensorial en todo su esplendor evoluciona no sólo a medida que una persona crece sino también con los cambios de la especie humana. Lo sensorial constituye la base de todo conocimiento y evaluación. En lo referente al conocimiento, lo que desempeña un papel más importante es la consciencia, en lo tocante a la evaluación, la necesidad.

En el estudio de la filosofía predominan dos grandes tipos de motivación: la universalidad del conocimiento y una vida mejor. Dado que ninguna búsqueda es susceptible de una solución completa y definitiva y que la teoría es, por definición, distinta de la práctica, generalmente hay un elemento utópico en el sentido de preparación para algún ideal futuro. Ambos tipos se ven unidos a través de la interacción de acuerdo y desacuerdo. La resolución de desacuerdos elimina un obstáculo en el camino hacia la universalidad y a la vez aumenta las posibilidades de armonía, que es un ingrediente fundamental de una vida mejor. En cierto modo es verdad que comprender no es sino perdonar y que lo que es ajeno constituye el indicio principal de mal. El conocimiento compartido aumenta la comprensión mutua y reduce el conflicto. En la práctica, la comprensión mutua no suele ser una meta consciente, sino que suele ser el resultado de interacciones y otras circunstancias. Si sabemos mucho más y todo el mundo comparte este conocimiento común, la capacidad de comprensión mutua aumenta también universalmente.

En realidad, con lo que más se asocia el conocimiento es con la capacidad de control. Para Bacon, el conocimiento es poder, primordialmente para conferir a la humanidad dominio sobre las fuerzas de la naturaleza por medio de las invenciones y descubrimientos científicos. Se supone tácitamente que el conocimiento es universalmente compartido. En el dominio humano, chocamos con la negativa a compartir el conocimiento y con que una persona o grupo lo emplea para contolar u oponerse a otra persona o grupo. Suelen ser los secretos, engaños, adhesiones incondicionales, los que en su forma más sutil determinan la «constitución del sujeto» (véase Foucault, «El sujeto y el poder» en *Michel Foucault,* H. Dreyfus y P. Rabinow, 1982, e. g., p. 208). Este fenómeno añade una nueva dimensión a la interacción entre conocimiento y poder para aquellos que persiguen un conocimiento universalmente compartido. El aumento de semejante conocimiento contribuirá a desenmascarar los fraudes y a reducir el poder de quienes consciente o inconsciente-

mente se benefician de ellos. Esta reacción ante el hecho del fraude y la ignorancia enriquece la interacción entre conocimiento y emancipación.

La búsqueda de una vida mejor contiene dos partes relacionadas: Puede ser para el individuo o para la colectividad (una comunidad, un país, los oprimidos de un grupo u otro, o toda la especie humana). Hay distintas concepciones y grados de condicionamiento mutuo entre la emancipación de uno y la emancipación de todos, como también hay distintas mezclas de aceptación y repulsa en las medidas propuestas para la emancipación. En el nivel más alto, la objetividad y la solidaridad convergen, dado que la universalidad *(universalitas)* del conocimiento y la emancipación de la totalidad *(universitas)* son condición mutua una de la otra. Este es por definición el más alto ideal, pues encierra la idea del «reino de la libertad». Es indudable que el propósito que G persigue en filosofía es asegurar la universalidad del conocimiento. Pero el principal cometido de la filosofía a mí me parece que es la determinación del concepto mismo de universalidad con objeto de que ésta sea la llave para la emancipación y se la pueda conseguir mediante el esfuerzo humano. No creo desde luego que el concepto buscado sea captado totalmente por nuestra experiencia con las matemáticas, pues después de todo, éstas no son más que un aspecto muy especial de nuestras vidas.

Parte III

TEXTOS (SUPLEMENTO)

En esta parte ofreceré algunos comentarios sobre textos procedentes de publicaciones gödelianas. Los dos capítulos tratan de los ensayos matemáticos y filosóficos, respectivamente.

Al igual que Leibniz, G escribió mucho más de lo publicado durante su vida y dejó sin concluir unos cuantos proyectos. Los principales resultados y proyectos de G pueden considerarse como desarrollos de ideas leibnizianas en diversas direcciones. Antes he aludido ya a la simpatía que G sentía por las grandes líneas de la monadología leibniziana, así como a su interés en realizar alguna forma modificada de característica universal (cosa que sabemos, en buena medida por el trabajo de G, que es imposible, al menos en el sentido fuerte de requerir un procedimiento de decisión). Los dos tuvieron fe en la capacidad del método axiomático y en la posibilidad de una fructífera lógica del descubrimiento (o ciencia del método). La lógica ocupa un puesto central en sus formas de concebir la filosofía. El respeto de G por Leibniz es comparable al que éste sentía por Aristóteles (en lógica) y por Platón (en filosofía).

William y Martha Kneale, en su *The Development of Logic* (1963, pp. 320-336) sometieron a amplia consideración las muchas facetas del pensamiento leibniziano acerca de la lógica, a la que «consideraba una joya capaz de arrojar luz en muy diferentes direcciones». Entre los componentes interrelacionados figuran 1) la coordinación

del conocimiento en una enciclopedia, 2) un lenguaje ideal universal, 3) un procedimiento para la rápida difusión del conocimiento (posibilidad ya contemplada antes que por él por Bacon y Descartes), 4) la estructuración de todas las proposiciones verdaderas en un sistema axiomático, 5) los procedimientos de decisión. Leibniz no pudo, desde luego, realizar todo este programa y sólo logró éxitos limitados. Por el trabajo de G y otros afines sabemos que 5 no es posible para teorías relativamente ricas y que 4 es imposible si los sistemas axiomáticos se limitan a los sistemas *formales* en el sentido comúnmente aceptado. De igual modo, 3 ha de entenderse liberalmente en términos de procedimientos que no son estrictamente *algorítmicos*. El programa modificado de G conserva lo esencial de los principales rasgos del ideal leibniziano. G siguió buscando una teoría axiomática fundamental (para la metafísica) de la que esperaba poder deducir todo conocimiento (o al menos establecer los fundamentos para él). Por lo demás, con objeto de realizar 3 buscó un análisis de conceptos que también nos aprovisionara de métodos para demostrar nuevos resultados. Leibniz afirmó, «Mi metafísica es por así decir toda ella matemática, o podría llegar a serlo» (Kneale, p. 336). En cierto modo, el enfoque de G produce una impresión similar.

El «interés leibniziano en la confección de una enciclopedia se debió en buena medida a su conciencia de la creciente tendencia a la fragmentación del saber». Cuando Leibniz tenía unos veinte años, concibió el proyecto como una serie de extractos sacados de los autores más competentes en las diversas materias, que habían de presentarse en un orden lógico de desarrollo. Más tarde, confirió a las matemáticas un lugar más importante en este esquema y además concibió la idea de una teoría axiomática que había de concluir, en un nivel, incluso el conocimiento de la naturaleza acumulado por los especialistas. En una etapa posterior aún, propuso incluir únicamente los primeros principios de las diversas ciencias y al final lo que de hecho hizo fue ofrecer un resumen de su cosmovisión en sus *Principes de la nature et de la grace* y en la *Monadologie* (esta interpretación sigue a Kneale, pp. 330-331, donde se dan algunas referencias concretas).

No sé si G pasó por un proceso de desarrollo similar. El también poseyó una gama de conocimientos extraordinariamente amplia pero, también es cierto que, en sus últimos años, encontraba objetable la recolección de datos y simpatizaba con la idea de que,

en filosofía, uno debe confinarse a lo que es fundamental y esencial. Creo que G tuvo que ver los cambios sufridos por Leibniz como acercamientos a un modo correcto de organizar y fundamentar el saber, más que como debilitamientos sucesivos de su meta. Tanto Leibniz como G tuvieron aptitud para apreciar puntos de vista alternativos. Pero G consideraba que la tarea central era el análisis, en tanto que Leibniz se enorgulleció con frecuencia de su habilidad para sintetizar. En la práctica, ambos dedicaron mucha atención al saber existente, aunque no fuera más que para convencerse a sí mismos de que la mayor parte de éste podía ser dejado de lado en el desarrollo de su obra fundamental.

Con respecto al desarrollo de la lógica matemática, dos de las ideas leibnizianas han resultado tener una importancia fundamental. Sus verdades de razón que «son válidas para todos los mundos posibles» inauguran un fructífero modo de caracterizar la verdad lógica. Esto es obvio en la interpretación de las «tautologías» (del cálculo proposicional) tal como se establece en el *Tractatus* de Wittgenstein, pero cuadra igual de bien con la noción de lo que es válido o verdadero en el marco de la lógica elemental. De ahí que el teorema de completud de G diga simplemente que todas las proposiciones que son verdaderas en todos los mundos posibles son demostrables en los sistemas formales conocidos de la lógica elemental. Por lo demás, como he dicho en varias ocasiones, parece deseable hallar algún concepto de mundo posible que permita ver a las proposiciones verdaderas de la teoría de conjuntos como verdaderas en todos los mundos posibles.

La otra idea leibniziana importante es su énfasis en los «argumentos formales», los cuales resultan «infalibles». Este requisito intuitivo empezó a ser objeto de gran atención en el siglo XIX y fue llevando gradualmente a la exhibición de sistemas verdaderamente formales en varias áreas importantes de la matemática. Los teoremas de incompletud de G son los resultados negativos decisivos a propósito de su capacidad de ser universales. (Para una amplia discusión de este desarrollo, véase mi *Survey,* pp. 1-28). Como sabemos, fue tras el descubrimiento de G cuando se formularon conceptos precisos (de procedimientos mecánicos o algoritmos), y cuando se vio que captan la esencia de lo que Leibniz llamó «argumentos formales» (véase la discusión en *MP,* pp. 84-86, 90-95).

Leibniz ofreció una idea de argumento formal en el contexto de la explicación de por qué era un entusiasta de la teoría aristotélica

del silogismo. «He mantenido que la invención de la forma silogística es una de las más sutiles y también de las más importantes que podía haber hecho la mente humana. Se trata de una especie de matemática universal cuya importancia es demasiado poco conocida. Puede decirse que incluye un arte que garantiza la infalibilidad... una bien ordenada formulación de ideas, un cálculo algebraico, un análisis infinitesimal —consideraré a todos ellos como argumentos formales, más o menos, porque en cada uno de ellos la forma del razonamiento se ha demostrado por anticipado de suerte que puede tenerse la seguridad de que uno no se equivoca con él» (*Nuevos Ensayos sobre el entendimiento humano,* escrito fundamentalmente en 1704, traducidos por P. Remnant y J. Bennett, 1981, pp. 478-479; véase H. Scholz, *Breve historia de la lógica,* 1931, trad. inglesa, 1961, pp. 50-59). Los ejemplos muestran que la concepción leibniziana incluía (lo que ahora se denomina) procesamiento de datos y manipulaciones simbólicas no-numéricas. La *Begriffsschrift* fregeana (1879) fue compuesta para hacer explícitas las inferencias lógicas con objeto de «lograr la precisión que mi propósito requería»: «Para impedir que pudiera introducirse inadvertidamente algo intuitivo, hube de dirigir todos los esfuerzos a liberar de huecos la cadena de inferencias. En el intento de cumplir con este requisito del modo más estricto posible vi que la inadecuación del lenguaje constituía un gran obstáculo» (*FG,* pp. 5-6).

En correspondencia con el ideal leibniziano de «infalibilidad», Frege perseguía demostraciones «libres de huecos» con objeto de impedir que se introdujera inadvertidamente la intuición. El doble énfasis en la *forma* lógica y en la infalibilidad (o el estar libre de huecos) apuntaba al requisito de que las pruebas han de ser mecánicamente comprobables en un sistema *formal.* La noción de forma indica, desde luego, algo que es universalmente verdadero. En otras palabras, todas las instancias de la forma son verdaderas, o una proposición lógicamente verdadera es verdadera «en virtud de su forma». Una instancia puede concebirse como una realización (interpretación o modelo) de la forma. Cuando realizaciones de las distintas formas son unidas de un modo consistente, se puede decir que se está describiendo un «mundo posible». Una forma verdadera o válida es precisamente aquella que es verdadera en todos los mundos posibles.

En *Wissenschaftslehre* (1837, reeditado en 1930) Bolzano dice que una proposición es válida (allgemeingültig) en relación con sus

componentes i, j, etc., cuando los resultados obtenidos modificando como se quiera esos componentes son todos ellos verdaderos. Si todas las partes invariables pertenecen a la lógica, la proposición se dice que es lógicamente verdadera (o «analítica en sentido estricto»). Mas luego añade, «Esta distinción encierra desde luego cierta vaguedad porque el dominio de conceptos que pertenecen a la lógica no está tan claramente delimitado que no puedan surgir controversias sobre la cuestión» (§148). Si hay consenso respecto de los conceptos de la lógica, entonces la definición de Bolzano determina el conjunto de proposiciones válidas o lógicamente verdaderas. De ahí que sea natural considerar completo a un sistema formal si todas las proposiciones lógicamente verdaderas son demostrables. Esta es la más clara de las dos definiciones de completud propuestas en relación con su sistema de lógica elemental en Hilbert-Ackermann (1928). Es también el sentido en el que G demostró en 1929 la incompletud de (los sistemas conocidos de) la lógica elemental.

Capítulo 10
ENSAYOS MATEMÁTICOS

En líneas generales, todos los ensayos matemáticos de G se escribieron antes de 1940 (más en concreto, entre 1929 y 1939). Las dos únicas excepciones son sus dos ensayos técnicos sobre teoría de la relatividad y la parte técnica de su ensayo de 1958. Como ya he comentado detalladamente algunos de estos ensayos en la primera parte de este libro y en *CW* se incluyen amplias anotaciones a todos ellos, en este capítulo me limitaré a hacer algunas observaciones sobre el trabajo de G encaminado a probar la completud de la lógica elemental y la incompletabilidad de la matemática. (En mi *Popular Lectures,* pp. 21-23 y 128-133, pueden hallarse bosquejos intuitivos de los pasos dados de hecho por G para llegar a su prueba de incompletud y a la de la consistencia relativa mediante conjuntos constructibles.)

10.1 **La completud de la lógica elemental**

La prueba fue ofrecida en su tesis doctoral (concluida en julio de 1929) y en el artículo emparentado con ella publicado en 1930 (recibido por el editor el 22 de octubre de 1929). Ambas versiones se hallan incluidas (tanto en alemán como en inglés) en *CW* (primer volumen, 1986), con una amplia nota introductoria escrita por B.

Dreben y J. v. Heijenoort. En 1967 analicé la prueba en relación con el trabajo de Skolem, siendo ésta la causa de que G me escribiera dos cartas (recogidas con omisiones menores en *MP*, pp. 8-11). Más tarde revisé mi valoración de la obra de Skolem con el fin de tomar en cuenta los comentarios de G, publicándola en *Selected Logical Works of Th. Skolem* (ed. E. Fenstad, 1970, pp. 17-52).

G tenía un buen dominio sobre una buena parte de la física teórica, la matemática y la filosofía cuando, en 1928, volcó su interés en la lógica. Por ejemplo, en octubre buscó libros de Frege y de Schröder. Asistió al curso de Carnap sobre «metalógica» (inscrito con el título de «Los fundamentos filosóficos de la aritmética») en el semestre de invierno de 1928/29. En este momento no existía más que una literatura muy limitada sobre lógica matemática, de la que lo más importante eran *PM* y HA (Hilbert-Ackermann, 1928). G estudió ambos libros al parecer a comienzos de 1929.

La tesis tiene especial interés no sólo por ser el primer trabajo científico amplio de G, sino por ser un ensayo extraordinariamente lúcido que aparece en un momento en que reinaba una gran confusión conceptual acerca de la naturaleza de la lógica y de sus métodos apropiados. Técnicamente añadía poca cosa a lo que había entonces, pero fue precisamente la clara percepción de lo que había lo que permitió obtener importantes nuevos resultados. La organización y presentación arrojaron mucha luz sobre todas las cuestiones relacionadas con el trabajo. Su aplicación de estas ideas a la prueba de la decidibilidad de una clase significativa de fórmulas en forma prenexa, conocida con el nombre del «caso Gödel» (véase el cap. 3, epígrafe 1929) proveyó de evidencia adicional a la primera percepción lograda por G del material más o menos conocido.

El primer sistema formal de lógica elemental fue introducido por Frege en su *Begriffsschrift* de 1879. No se trataba de un sistema totalmente formal ya que se empleaban reglas de sustitución que no eran establecidas (y en instrucciones notacionales se halla escondida una regla de generalización). Tampoco era un sistema de lógica elemental únicamente, ya que en él se permite que aparezcan en cuantificadores letras de función (o variables predicativas). Para más detalles, véase *FG*, pp. 2-4). El sistema de *PM* (1910) era similar en ambos aspectos (deja también implícitas algunas reglas y no es tampoco un sistema del todo independiente). Las reglas de inferencia fueron hechas explícitas en el sistema HA, si bien aquí, igual que en *PM*, no se toma la identidad como un concepto primitivo.

(El sistema de HA es debido a Bernays, como se reconoce en la p. 54.) En cualquier caso, los tres fueron generalmente aceptados como sistemas formales de lógica elemental y G tenía conocimiento de los tres en 1929.

Así pues, cincuenta años separan la introducción por parte de Frege del primer sistema de la demostración que G hace de que estos sistemas son todos ellos completos. Pero lo que llevó tanto tiempo fue más la toma de conciencia del problema (de completud) que su solución (una vez planteado el problema). La cuestión no se formuló y planteó por primera vez hasta 1928 (HA, p. 68). La respuesta llegó enseguida (procedente de G). Por tanto, G resolvió el problema prácticamente nada más tropezarse con él. De ahí que lo más enigmático sea lo que se tardó en formular el problema.

Tanto Frege como Russell tomaron la lógica elemental como parte integrante de una lógica general más rica. Estaban convencidos, igual que Wittgenstein en el *Tractatus,* de que uno no puede situarse fuera de la lógica, la cual determina el límite de lo que es pensable o «expresable», y hablar de la lógica en una metalógica (o metamatemática). Por otro lado, Boole, Peirce, Schröder, Löwenheim, y en una gran medida también Skolem, no se ocuparon de sistemas formales. Fue la escuela de Hilbert la que planteó por primera vez semejantes cuestiones, a medida que sus miembros, a partir de los axiomas de la geometría y de su completud, consistencia e independencia, fueron moviéndose gradualmente hacia la lógica y los sistemas formales.

La completud del cálculo proposicional fue formulada y resuelta por Bernays en 1918 en su *Habilitationsschrift,* de la que en 1926 se publicó una versión abreviada. G aludió explícitamente al artículo publicado: «En lo que se refiere a las fórmulas del cálculo proposicional, la cuestión ha sido respondida afirmativamente, es decir, se ha mostrado que toda fórmula verdadera del cálculo proposicional se sigue de los axiomas ofrecidos en *Principia Mathematica*» (*FG,* p. 583). Desde un punto de vista distinto, el *Tractatus* de Wittgenstein (también concluido en 1918) puede considerarse como una formulación, aunque no como una solución, de los problemas de validez y completud con respecto a la lógica (elemental). Pero, debido en parte a su injustificada reducción de las proposiciones cuantificadas a conjunciones y disyunciones, toda la lógica se convirtió en el cálculo proposicional. Su forma de análisis por tablas de verdad sugería la cuestión (así como sólidas pistas para su respuesta afirmati-

va) de si el análisis podría llevarse a cabo todo él en algún sistema formal conocido (tal como el cálculo proposicional de Frege o de *PM*), estableciendo con ello su completud (semántica).

10.1.1. *Digresión sobre Bernays*

Como G, Bernays estuvo sumamente interesado tanto en lógica como en filosofía. Bernays era casi dieciocho años más viejo que G (pero murió prácticamente a la vez). Debido en gran parte a esta diferencia de edad, sus desarrollos y éxitos fueron muy distintos, pero llegaron a sentir un aprecio mutuo cada vez mayor por sus respectivas perspectivas filosóficas. La siguiente consideración de algunos de los aspectos de Bernays se basa en la memoria de E. Specker incluida en *Logic Colloquium 78* (ed. M. Boffa, D. v. Dalen, y K. McAloon, 1979, pp. 381-389).

Bernays vivió desde el 17 de octubre de 1888 (Londres) hasta el 18 de septiembre de 1977 (Zurich). Durante un semestre, estudió ingeniería y luego se pasó a la matemática pura, estudiando también filosofía y física teórica. Su primera publicación (1910) era de filosofía. En 1912 escribió su tesis doctoral (en Göttingen) y su Habilitationsschrift (en la universidad de Zurich con E. Zermelo como profesor), ambas sobre teoría analítica de números. Entre 1913 y 1917 «Bernays debió pasar alguna crisis... En esta época consideró incluso la posibilidad de abandonar la matemática, pero no encontró nada que le pareciera que podía hacer mejor».

En 1917 viajó a Göttingen respondiendo así a la propuesta de Hilbert de tenerle como colaborador. Para su nuevo puesto, escribió en muy breve tiempo su brillante ensayo «Beiträge zur axiomatischen Behandlungen des Logikkalküls» (en abreviatura, B, presentado en 1918). La referencia de G corresponde a la versión abreviada, publicada ocho años más tarde en *Math. Zeitschrift*, vol. 25, 1926, pp. 305-320, y descrita más específicamente como un estudio axiomático del cálculo proposicional de *PM*. Tanto los contenidos de B como la razón por la que no fue publicado de inmediato encierran gran interés histórico.

Entre los resultados establecidos en B se encuentran los siguientes items: 1) el cálculo proposicional de *PM* es convertido en un sistema formal por el procedimiento de hacer explícita la regla de sustitución. 2) Se definen la derivabilidad y la validez y se demuestra

que una fórmula es derivable en el sistema si y sólo si es válida (en otras palabras, el sistema es «correcto» y completo); un lema se prueba diciendo que toda fórmula es demostrable si se añade a los axiomas una fórmula no derivable. 3) Uno de los cinco axiomas del sistema *PM* se muestra que es redundante y los otros cuatro se muestra que son independientes empleando más de dos «valores de verdad»; ésta parece que es la primera vez que se introducen las lógicas «plurivaloradas». (La descripción que Bernays hace de su método se expone en la memoria de Specker, en la p. 385.) 4) Se demuestra la posibilidad de reemplazar axiomas por reglas, incluyéndose un sistema que incluye «si *p* entonces *p*» como único axioma y seis reglas.

En cierta ocasión Bernays le contó a Specker por qué no había publicado B antes (Specker, p. 382): «Indudablemente, el ensayo era de carácter matemático, pero las investigaciones inspiradas por la lógica matemática no se tomaban demasiado en serio. Se consideraban como algo divertido, como una cosa cercana a las matemáticas recreativas. Yo mismo participaba de esta tendencia y en esta época no me tomé la molestia de publicarlo. No ha aparecido hasta mucho después y, estrictamente hablando, no del todo completo, sino únicamente algunas partes de él. Por eso, muchas de las cosas que tenía en el ensayo no han sido recogidas en las descripciones del desarrollo de la lógica matemática.» Entre 1918 y 1926 fueron descubiertos y publicados unos cuantos resultados similares a los contenidos en B por Post y otros, destacando la «Introduction to a general theory of elementary propositions», *Am. J. Math.*, vol. 43, 1921, pp. 163-185.

Bernays se convirtió, en 1922, en profesor «extraordinario» de Göttingen pero, por ser «no-ario» perdió su puesto en 1933. En 1934 regresó a Zurich donde permaneció hasta su retiro en 1958, primero como Privatdozent y luego como profesor. Entre sus obras más conocidas figuran los monumentales *Grundlagen der Mathematik* (HB, dos volúmenes, 1934 y 1939), su sistema de teoría de conjuntos y varios de sus ensayos sobre filosofía (reunidos en parte en su *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, 1976). Publicó cientos de reseñas de las que algunas son, tanto por su contenido como por su longitud, verdaderos ensayos. Mantuvo correspondencia con un millar de personas sobre asuntos escolares, conservándose unas seiscientas cartas. Siempre fue amable con los estudiantes y aceptó muchas invitaciones para dar conferencias o publicar. Ayudó a mu-

cha gente a escribir sus artículos, desde Hilbert a un oscuro profesor de escuela superior. «Fue único en su negativa a juzgar a los demás; jamás habló mal de nadie. Hay todas las razones para suponer que ni siquiera pensaba mal de los demás.» Me agrada poder ratificar la siguiente afirmación de Specker: «En nombre de todos cuantos han conocido personalmente a Bernays, se puede decir sin duda: Agradecemos el privilegio de haber tenido contacto con Bernays.»

No deja de ser sorprendente que la expansión de la formulación (y la solución) de la cuestión de la completud al dominio más amplio de la lógica elemental tuviera que esperar todavía diez años. Por ejemplo, Bernays no menciona la completud de la lógica elemental en su «Probleme der theoretischen logik» de 1927 (*Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften,* vol. 33, núm. 12). La razón de por qué el problema de la completud no se formuló antes me parece similar a la explicación dada por G de por qué su fácil solución se les escapó a Skolem y a otros (incluidos Bernays y Herbrand). En ese tiempo, según G, el razonamiento no-finitario en matemáticas solía considerarse que sólo era significativo en la medida en que puede «interpretarse» o «justificarse» en términos de una metamatemática finitaria (*MP,* p. 8). Esta observación resulta, desde luego, aplicable no sólo al razonamiento no-finitario sino también a la formación de conceptos, y el concepto mismo de completud envuelve el componente no-finitario de ser verdadero en «dominios arbitrarios».

Visto desde esta perspectiva, lo que resulta sorprendente no es lo mucho que tardó en introducirse el concepto, sino más bien que se introdujera. Para emplear un término de moda, podría decirse que el «paradigma» de este momento no podía dar cabida ni a la formulación del problema ni a su solución. Aunque es plausible decir que G inició un nuevo paradigma, el hecho de que el problema se planteara en HA, que pertenecía al viejo paradigma, muestra que los paradigmas no son tan rígidos o insulares como muchos entusiastas de los «paradigmas inconmensurables» han mantenido. Por lo demás el espíritu del viejo paradigma ha seguido inspirando la obra de muchos lógicos y de los «empiristas analíticos» (véase *BA,* pp. 10-26).

En este punto me gustaría pasar a hacer un examen del texto de la tesis de G y del artículo relacionado con ella.

D) *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls,* concluido en julio de 1929,

texto mecanografiado de treinta y tres páginas más una de título y otra de «Inhaltverzeichnis».

C) «Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls», *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 37, 1930, pp. 349-360 (concluido en octubre de 1929, recogido en *FG*, pp. 582-591). Como dice G, esta obra hace con la lógica elemental lo que Bernays hizo con el cálculo proposicional en 1918. En concreto, la inclusión de las pruebas de independencia de los axiomas como suplemento fue probablemente totalmente sugerida por el tratamiento de Bernays.

Un marco inicial adecuado en el que considerar D y C lo constituye el propio índice de contenidos preparado por G para D. [D acaba de ser publicado, junto con su traducción inglesa, en *CW*, I, pp. 60-101.] Los números insertos entre corchetes se refieren a este texto.

Sección 1. Introducción (pp. 1-5 [60-65]). Esta fue suprimida en buena medida en C, donde sólo se incluyó la primera media página en forma revisada, con la adición de una referencia explícita a la obra de Bernays, seguida de la afirmación, «Aquí se hará lo mismo para un dominio más amplio de fórmulas» (*FG*, p. 583).

Sección 2. Observaciones preparatorias sobre el sistema axiomático subyacente y la terminología empleada (pp. 6-9 [65-69]). Esta sección fue abreviada en C (*FG*, p. 548) enriqueciendo con más material las notas y omitiendo la distinción entre «en sentido amplio» y «en sentido estricto», según se incluya o no el signo de identidad. El sistema adoptado es el de *PM* (*1 y *10), con las reglas de inferencia hechas explícitas. La terminología y el simbolismo siguen HA. La nota siguiente (D, p. 7) fue suprimida en C: «Los otros sistemas axiomáticos establecidos (Frege, Bernays) no difieren esencialmente del de Russell, por lo que la prueba de completud es trasladable a ellos.» La referencia a Bernays se debe probablemente al hecho, mencionado antes, de que el sistema de HA es debido a él.

Sección 3. Resumen de los teoremas requeridos del cálculo funcional (pp. 10-12 [70-73]). Estos se simplificaron mucho en C (*FG*, pp. 584-585, una lista con siete entradas). Es evidente que para probar la completud del sistema hemos de emplear algunas de las proposiciones demostrables en él. La idea de G fue hacer las cosas de un modo más ordenado dando un listado de ellas al comienzo en lugar de introducirlas a medida que hacían falta.

Sección 4. Reducción del teorema de completud al teorema correspondiente para fórmulas de grado 1 (pp. 12-15 [72-79]). Esto corresponde a los problemas III y IV de C (*FG*, pp. 585-586). Las fórmulas de grado 1

son las que están en forma normal skolemiana *(i.e.,* con todos los cuantificadores al comienzo y los universales delante de los particulares). Skolem demostró en 1920 (en artículo recogido en *FG,* pp. 252-263) que cada fórmula *F* tiene una forma normal skolemiana *S* que es satisfacible si y sólo si *F* lo es. G aludió a este artículo y demostró que *F* es o bien satisfacible o bien refutable si *S* lo es. De ahí que no sea preciso considerar más que fórmulas en forma normal skolemiana *(i.e.,* de grado 1).

Sección 5. Demostración del teorema de completud en el sentido estricto (pp. 16-22 [78-88]). Esto corresponde a los teoremas V y IV de C *(FG,* pp. 587-589), de los que el teorema de completud (para la lógica elemental sin identidad) se sigue de forma inmediata. En D (p. 21 [87]) se ofrecía el argumento correspondiente a una prueba del «lemma de infinitud», pero en C fue sustituido por la frase «Se deduce por conocidos argumentos» *(FG,* pp. 588-589). Aunque el argumento es relativamente simple, no es obvio. E.g., la exposición de la segunda edición de HA tiene fallos.

Sección 6. Demostración del teorema de completud en el sentido amplio (pp. 23-25 [88-93]). Esta sección extiende el teorema de completud hasta incluir la identidad. Corresponde a los teoremas VII y VIII de C *FG,* pp. 589-590).

Sección 7. Demostración de la independencia del sistema axiomático de la lógica (pp. 26-29 [92-97]). Esta sección fue abreviada y colocada al final de C *(FG,* p. 591).

Sección 8. Extensión del teorema de completud a sistemas infinitos de expresiones lógicas y aplicaciones axiomáticas (pp. 30-33 [96-101]). La generalización establece que todo conjunto denumerable de fórmulas es satisfacible o refutable. La aplicación establece que todo sistema axiomático (teoría de primer orden) tiene un modelo o es inconsistente. En C la demostración de la generalización (ofrecida en D) fue ligeramente modificada para probar lo que actualmente se conoce con el nombre de «teorema de compacidad»: Un conjunto denumerable de fórmulas es satisfacible si y sólo si todo subconjunto finito lo es. Luego se ofrece la generalización como una consecuencia inmediata *(FG,* pp. 590-591).

Para resumir, los principales cambios entre C y D fueron la adición del teorema de compacidad y la supresión de la introducción del «lemma» de la sección 5. En conjunto, C es más breve que D y menos informal; aparecen diez teoremas numerados, referencias más detalladas son ofrecidas en las notas, y se suprimen las amplias consideraciones (de la introducción de D). Las únicas referencias explícitas a la literatura son una pequeña parte de *PM* (*1 y *10) y HA, el trabajo de Bernays de 1926, y el de Skolem de 1920. El siste-

ma axiomático de Hilbert para la geometría (sin el axioma de continuidad) se ofrece como ejemplo (D, p. 9 y C, p. 591). Brouwer y Frege son mencionados en D, pero no en C.

No carece de interés histórico la relación que media entre C y D de G y la conferencia de Skolem de 1922 (publicada en 1923, versión inglesa incluida en *FG*, pp. 290-301). G buscó en una biblioteca, en noviembre de 1928, el volumen que contiene la conferencia, pero no lo encontró. En 1929 y 1930 siguió preguntando por él en alguna otra biblioteca. Ignoro cuándo logró verlo. Pero, en cualquier caso, G mencionó en los sesenta este artículo en varias ocasiones. El 7 de diciembre de 1967, me escribió, «El teorema de completud es, desde el punto de vista matemático, una consecuencia casi trivial del trabajo de Skolem de 1922» (*MP*, p. 8). En su carta a J. v. Heijenoort (4 de octubre de 1963) daba detalles de sus recuerdos de esa época: «En lo que concierne al artículo de Skolem, creo que lo leí por primera vez por el tiempo en que publiqué mi teorema de completud. El que no lo citara tiene que deberse al hecho o bien de que las citas fueron tomadas tal cual de mi tesis doctoral o a que no vi el artículo antes de la publicación del mío. En cualquier caso, de lo que estoy prácticamente seguro es de que no lo conocía en el momento de escribir mi tesis. De lo contrario, lo habría citado, dado que tiene mucho más que ver con mi trabajo que el de 1920, que sí citaba» (*CW*, vol. 1, p. 51).

La introducción a D analiza la relación entre la existencia del concepto (introducido por un sistema axiomático) y la consistencia del sistema. La discusión contiene comentarios explícitos sobre la teoría de Brouwer e implícitos sobre la de Hilbert. El teorema de completud muestra que toda teoría consistente de primer orden posee un modelo. Este es el sentido en el que G ve su teorema como «una compleción teórica del modo usual de probar la consistencia». En contra de la contraposición establecida por Brouwer entre consistencia y existencia, G mantiene que, puesto que, por su teorema toda teoría consistente (de primer orden) posee un modelo, la existencia acaso pueda definirse por la consistencia. Sin embargo, el teorema únicamente prueba la existencia de un modelo; no existe la seguridad de que podamos hallar la estructura apropiada y demostrar que se trata de un modelo. Desde luego, si todos los problemas matemáticos son solubles, entonces no hay ninguna dificultad porque, en concreto, podemos resolver el problema de hallar la estructura y demostrar que no es sino el modelo. Esta observación indica

una presuposición de la propuesta de Hilbert (aunque no se lo menciona) de identificar consistencia y existencia.

El resto del largo primer parágrafo de D (*CW*, I, pp. 63 y 65) sugiere la posibilidad de hallar proposiciones indecidibles en un sistema formal. Consideremos las siguientes oraciones:

1) Pues, si se probara la insolubilidad de algún problema (en el dominio de los números reales, pongamos por caso), entonces por la definición anterior [de la existencia por la consistencia], habría dos realizaciones no-isomórficas del sistema axiomático de los números reales, mientras que a la vez podemos probar el isomorfismo de cualquier par de realizaciones.

2) No podemos, sin embargo, excluir sin más una prueba de la insolubilidad de un problema si observamos que lo que se halla en entredicho aquí es tan sólo la insolubilidad mediante ciertos medios de inferencia *formales establecidos con toda precisión.*

3) Pues, todos los conceptos en consideración (demostrable, consistente, etc.) sólo tienen un sentido preciso cuando se trazan con toda exactitud las reglas de inferencia permitidas.

El enunciado 3 puede considerarse como una crítica implícita a la actitud negativa de Brouwer hacia los sistemas formales. También ofrece una razón de por qué puede resultar posible hallar proposiciones indecidibles. G está indicando aquí que los conceptos en cuestión sólo tienen un sentido preciso cuando son caracterizados por sistemas formales. Esto parece implicar que los conceptos de demostrabilidad absoluta y definibilidad absoluta, considerados en su conferencia de Princeton de 1946 (Davis, pp. 84-88), no pueden tener un sentido preciso.

La presuposición de que todo problema matemático es soluble alude ciertamente a la demostrabilidad absoluta (más que a la demostrabilidad en algún sistema formal concreto). Tal como yo lo veo, el enunciado 1 también se ocupa de la demostrabilidad absoluta. La función obvia de este enunciado es desde luego, mostrar que la identificación de existencia y consistencia requiere la presuposición de que todos los problemas matemáticos son solubles. Pero, además, muestra también que nunca podemos exhibir una proposición (procedente del campo de los números reales) y probar que es absolutamente indecidible. Ambas conclusiones dependen de la aceptación de la idea de que tenemos un sistema axiomático categórico («de segundo orden») (aunque no un sistema formal, como más

tarde demostró G) para los números reales. No veo modo útil alguno de poner en duda esta idea, que aparentemente es tomada, en el citado enunciado, como un hecho dado.

El enunciado de enlace 2 puede concebirse también como una afirmación implícita de que, puesto que sólo podemos estudiar la cuestión de la insolubilidad cuando empleamos reglas exactas, lo que está en entredicho no puede ser más que la insolubilidad de un sistema formal. Si eliminamos de él «observamos que» y «aquí», tendríamos un enunciado más sencillo (y débil). Pero, en este caso, el enunciado 3 resultaría innecesario.

G establece explícitamente en D que su demostración emplea la ley del tercero excluido sobre dominios infinitos y destaca que el problema de la completud, a diferencia del de la consistencia, no surge en un principio de la controversia sobre los fundamentos, sino que podría plantearse significativamente dentro del marco de una matemática «ingenua». De ahí que, como cualquier otro problema matemático (ordinario) no se precise restricción alguna sobre el medio (o método) de prueba. De acuerdo con la interpretación intuicionista, dice, la ley del tercero excluido no parece afirmar ninguna otra cosa que la decidibilidad de todos los problemas; pero parece cuestionable incluso el que este enunciado sea en general significativo. Por lo demás, dado que el concepto de satisfacibilidad por un modelo tiene un sentido fundamentalmente distinto para los intuicionistas, el problema en conjunto se convierte para ellos en un problema distinto. «Es obvio que una prueba intuicionista de completud sólo sería viable a través de la solución [positiva] del Entscheidungsproblem de la lógica matemática, en tanto que el resultado [D] tan sólo lo transforma en (reduce a) el problema de la deducibilidad formal [en sistemas formales conocidos del cálculo funcional restringido].»

10.2. **Incompletabilidad de la matemática**

Según G, en el verano de 1930, intentó probar la consistencia relativa (del análisis clásico) y enseguida se vio llevado a la observación de que la verdad matemática no es definible en aritmética. Sin embargo, la demostrabilidad en un sistema formal dado S es indefinible en aritmética, y él fue capaz de idear una proposición p de S que dice de sí misma que no es demostrable en S. Intuitivamente, p

ha de ser indemostrable en S y, en consecuencia, verdadera. (Si *p* fuera demostrable en S, estaríamos ante algo contraintuitivo porque *p* dice que *p* no es demostrable en S.) Pero si S no es muy extraño, *p* tampoco es refutable en S, porque es verdadera.

Entre septiembre y octubre de 1930, mejoró y amplió el resultado convirtiendo a *p* en una proposición «aritmética» de elegante forma y señalando que cualquier proposición de S que exprese de un modo natural la consistencia de S puede hacer también las veces de la proposición indecidible *p* (de S). De ahí que ninguna demostración de la consistencia de S se pueda formalizar del todo en S. El 23 de octubre se presentó un anuncio de estos resultados y el 17 de noviembre se recibió para su publicación el artículo completo. De donde se deduce que todo este impresionante trabajo fue realizado en menos de medio año cuando G contaba sólo con veintitres.

Las principales publicaciones de G en esta área son:

U) «On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I», originariamente en alemán, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38, pp. 173-198, recogido en Davis (1965), pp. 5-38, y en *FG* (1967), pp. 596-616. En *FG* hay tres añadidos de G: un suplemento a U (proveniente de una presentación del 22 de enero de 1931), una nota (23 de agosto de 1963), y una larga observación (18 de mayo de 1966) (todo ello en las pp. 616-617). El suplemento explicita aún más que los teoremas son aplicables no sólo a sistemas de la teoría de conjuntos, sino también a sistemas aritméticos. La observación destaca un tratamiento más general y elegante de los teoremas cruciales. La nota afirma que los principales teoremas del ensayo U son aplicables a todos los sistemas *formales* habida cuenta del hecho de que ahora contamos, como consecuencia del trabajo de M. A. Turing, con un concepto preciso de sistema formal.

L) «On undecidable propositions of formal mathematical systems», notas de las conferencias impartidas por G en la primavera de 1934, publicadas por primera vez en Davis, pp. 41-74, con enmiendas y un postscriptum de G (3 de junio de 1974, pp. 71-73).

Siguiendo el enfoque inicial de G, enumeremos los símbolos primitivos, las fórmulas y las demostraciones de un sistema formal dado S. En concreto, suponemos una enumeración de aquellas fórmulas que son formas proposicionales con una variable libre (llamémoslas propiedades). Supongamos que somos capaces de encontrar en S una forma proposicional $B(x, y, z)$ que tiene el siguiente

significado: la prueba número *x* es una prueba en S de la proposición obtenida a partir de la propiedad *y* poniendo el numeral del número *z* en todas las ocurrencias de la variable libre (de la propiedad *y*). Dado que S es un sistema formal, *B (x, y, z)* es una relación «decidible» (o transparente) tal que, para determinados valores de *x, y,* y *z,* podemos verificar (y probar en S) si es verdadera o falsa. Consideremos ahora la propiedad *(x) − B (x, y, y)* y sea ésta la propiedad número *b*. *B (x, b, b)* no puede ser verdadera para ningún *x,* porque, si lo fuera, la prueba número *x* sería una prueba de la proposición obtenida de la propiedad *b* colocando el numeral de *b* en lugar de *y,* cosa que equivale a *(x) − B (x, b, b)*. En tal caso, tendríamos en S pruebas tanto para *B (x, b, b)* como para su negación. De ahí que, para cada *x* dado − B (x, b, b) sea verdadera y demostrable en S. Supongamos que Con(S) dice que el sistema S es consistente. Si formalizamos el anterior argumento en S podemos derivar en S, a partir de la hipótesis Con(S), la conclusión *− B (x, b, b) c* (con *x* como variable), y por tanto también *(x) − B (x, b, b)*. Por otro lado, *(x) − B (x, b, b)* no es demostrable en S porque si la prueba número *c* fuera su prueba, *B (c, b, b)* sería verdadera y demostrable en S, con lo que tendríamos de nuevo una contradicción en S. En consecuencia, si S es consistente, Con(S) no es demostrable en S.

Por lo demás, hemos mostrado que si S es consistente, *(x) − B (x, b, b)* no es demostrable en S, aunque para cada número dado *a, − B (a, b, b)* sí lo sea. El sistema S sería muy extraño si *(x) − B (x, b, b)* fuera refutable viendo que todas sus instancias son demostrables. G excluye este extraño estado de cosas introduciendo el requisito de que S sea «omega-consistente», que es una propiedad más fuerte que la mera consistencia. (En 1936, J. B. Rosser fue capaz de prescindir de esta condición tan fuerte empleando una proposición más compleja.) De ahí que si S es un sistema razonable, *(x) − B (x, b, b)* sea indecidible en S (véase el correspondiente análisis de G en Davis, pp. 60-61).

La forma de la propiedad *B (x, y, z)* parece muy distante de las operaciones aritméticas ordinarias como la adición y la multiplicación. G se llevó una sorpresa cuando logró mostrar que se trataba de un predicado «aritmético», *i.e.,* de un predicado susceptible de ser expresado en términos de adición y multiplicación con ayuda de cuantificadores. Lo que en realidad hizo en U es mostrar que *B* es un predicado recursivo primitivo y que todos los predicados recursivos primitivos son aritméticos. Además, se prueba que todo pre-

dicado recursivo primitivo es ***decidible*** (entscheidungsdefinit) o verificable (de acuerdo con HB) en el sentido de que cualquier instancia dada [como, por ejemplo, *B (a, b, c)* para las constantes *a, b, c]* es demostrable si es verdadera y refutable si falsa en un sistema relativamente fuerte S. De hecho, como esta propiedad es crucial en el argumento bosquejado antes, G sugiere en U una generalización de este teorema VI que establece que toda clase de fórmulas que sea omega-consistente y decidible contiene proposiciones indecidibles (Davis, p. 26 y *FG,* p. 609).

[Este concepto de predicados decidibles corresponde al de G de ***computable*** en un sistema S, introducido más tarde en su «On length of proofs» (1936), en donde subraya que el concepto es en cierto sentido «absoluto» porque cualquier función computable en un sistema más elevado S_i es ya computable en el sistema rudimentario S_1, que puede considerarse como la aritmética de primer orden (Davis, p. 83). Las funciones computables de cualquier S_i (en especial, S_1) son, como G señaló explícitamente en su conferencia de Princeton de 1946, exactamente las funciones computables de Turing o (generales) recursivas. De ahí que esté justificado decir que G introdujo de ese modo un concepto de computabilidad (o de procedimientos mecánicos) antes de que se propusieran cualquiera de los otros conceptos alternativos.]

No es exagerado considerar a U como el trabajo más importante de toda la historia de la lógica matemática. En muchos sentidos dio unidad, consolidó y elevó el trabajo previo a un nivel mucho más alto en prácticamente todas las direcciones importantes, probando resultados centrales sorprendentes, precisando viejos conceptos, introduciendo conceptos nuevos y abriendo horizontes totalmente nuevos. Lo que es menos patente es que, en el proceso de probar sus espectaculares teoremas, G fue capaz de desarrollar por completo todos los aspectos conocidos y nuevas direcciones relevantes de un modo tan holgado que otros pudieron continuar su trabajo sobre un fundamento más rico y sólidamente estructurado.

Así por ejemplo, Dedekind, Skolem, Hilbert y Ackermann habían trabajado todos ellos antes sobre funciones recursivas primitivas, pero G ofreció la primera definición precisa de esta clase de funciones, definición que desde entonces ha sido aceptada como la definición estándar (Davis, pp. 14-15 y *FG,* p. 602). Por otro lado, introdujo los predicados recursivos primitivos y los extendió a predicados decidibles, anticipando con ello en alguna medida la clase

global «absoluta» de las funciones computables o recursivas. Ofreció un tratamiento sistemático de la idea intuitiva de que las funciones o predicados decidibles son verificables (o «numeralwise representable») en el sentido de que, por ejemplo, todas las instancias numéricas de la conjetura de Fermat se pueden verificar (probar o refutar) en un sistema formal razonablemente fuerte. Hasta su sistema P, en tanto que formulación precisa del sistema de *PM,* supuso un gran avance sobre las formulaciones de teoría de conjuntos conocidas en ese momento (Davis, pp. 9-13 y *FG,* pp. 99-601). Tanto Leibniz como Hilbert habían sugerido ya la idea de representar conceptos o expresiones por números, pero G fue el primero en desarrollar sistemáticamente la idea y en aplicar la «numeración gödeliana» en la «aritmetización de la sintaxis» (Davis, pp. 13-14 y *FG* p. 601). Los sorprendentes resultados de la sección 3 de U (Davis pp. 29-35, 65-69, y *FG,* pp. 610-614) pulieron los principales teoremas (confiriendo a las proposiciones indecidibles una forma aritmética precisa) y anticiparon y pusieron en marcha importantes desarrollos posteriores. Me extenderé más en este punto cuando más adelante ofrezca el consiguiente resumen de U.

Naturalmente, los resultados centrales y más notorios de U son los dos famosos teoremas que muestran las limitaciones de la formalización, solucionan la mayor parte de los problemas planteados por la escuela de Hilbert y refutan las conjeturas del programa de éste, tal como se formuló originariamente. Dado que la preocupación por las formas, lo formal y la formalización es central a la empresa de la lógica matemática, los dos teoremas plantearon el tema a un nuevo nivel inculcando en los profesionales la gran importancia de la interacción de lo formal y lo intuitivo, aun cuando el área se restrinja al estudio de lo formal. Los dos teoremas de G también confieren unidad al campo en la medida en que resultan aplicables a todos los grandes dominios de interés: la teoría de números, el análisis, la teoría de conjuntos (e incluso, a través del teorema *X,* la lógica elemental; véase más abajo).

Los teoremas incidieron de distinto modo en las tres «escuelas» de filosofía de la matemática: formalismo, logicismo e intuicionismo. Destruyeron las esperanzas de los formalistas de hallar sistemas formales matemáticos completos y pruebas finitarias de consistencia, así como las de los logicistas de hallar un sistema formal global (transparente) de (gran) lógica. Los teoremas causaron menos sorpresas entre los intuicionistas, aunque tanto ellos como sus pruebas

son constructivos y, por ende, aceptables para ellos; por lo demás el trabajo les hizo ver de qué modo el uso apropiado de métodos formales podía llevar a conclusiones precisas que ellos sólo podían ver en parte y de forma imprecisa. Como he observado antes (en el cap. 3, al final del epígrafe 1931), la creencia de Brouwer en la inagotabilidad de la matemática por un sistema formal cualquiera no incluía aparentemente el sorprendente hecho descubierto por G de que cabe halllar *en el sistema dado* una proposición indecidible. La falta de interés por parte de Brouwer por las pruebas de consistencia formaba parte de su creencia en que el requisito de la consistencia no necesita existir ni ser verdadero o correcto. Por lo que yo sé, Brouwer no afirmó ni conjeturó que la consistencia de un sistema no se pueda probar en él. Por lo demás, si hubiera pruebas finitarias de consistencia de sistemas matemáticos formales totalmente incluyentes, cabría la esperanza de poder ver cosas que harían mucho menos convincentes aún algunas de las tesis de Brouwer. De ahí que los resultados de G sobre las pruebas de consistencia respondieran a una pregunta que, al menos indirectamente, era también importante para los intuicionistas.

El ensayo U consta de cuatro secciones, de las que la 2 es con mucho la más larga, conteniendo varias partes.

Sección 1. Sea P el sistema de *PM* tal como es reformulado por G. Se asignan números naturales a los signos primitivos. Se señala que se puede hallar en P una fórmula que dice, «Yo no soy demostrable en P». Mediante argumentos como los resumidos antes, G muestra de un modo informal que ésta es indecidible en P. «La analogía de este argumento con la antinomia de Richard salta a la vista.» La antinomia de Richard (1905, *FG,* pp. 142-144 (es una variante del argumento de la diagonal de Cantor, y la analogía estriba en enumerar todas las fórmulas demostrables y construir una que sea diferente de todas las demás, con la propiedad adicional de ser como una fórmula demostrable (correspondiente al «definible mediante un número finito de palabras» de Richard). Se establece y formula una comparación con el «Mentiroso»: «Para una prueba similar de la existencia de proposiciones indecidibles se podría emplear cualquier antinomia epistemológica» (nota a pie de página 14). Resulta extraño y poco afortunado que G no elaborara en este contexto la comparación con el «Mentiroso», sobre todo teniendo en cuenta que una de las primeras cosas en que reparó en el verano de 1930 era que la verdad aritmética no es definible en aritmética. El hecho de que no haya formulado el «Mentiroso» ni siquiera en la forma «Yo no soy verdadero» no puede haber sido sino consecuencia de su cautela, debida a que el concepto de verdad aritmética era ampliamente consi-

derado en este tiempo como oscuro. No sería de extrañar que Zermelo se hubiera visto arrastrado al engaño por tan breve comparación. No fue sino en su carta de 12 de octubre de 1931 cuando G esclareció del todo la distinción y probó que la verdad no es definible en el propio lenguaje (véanse los detalles en el cap. 3, epígrafe 1931). Posteriormente, G reveló en L (las conferencias de Princeton) lo que le había escrito a Zermelo y dedicó toda la sección 7 a esta cuestión («relación de los argumentos anteriores con las paradojas», pp. Davis, pp. 63-65).

Sección 2. Esta larga sección contiene la prueba completa del primer teorema de incompletud y consta de varias partes.

2.1. El sistema formal P. Este no es sino una reformulación del de la teoría de tipos incluido en *PM*. En L se emplea un sistema similar (sección 3), pero se restringe a los dos primeros tipos.

2.2. Relaciones y funciones recursivas primitivas. Se definen con precisión y se prueban cuatro teoremas básicos. Esta parte corresponde a la sección 2 de L, que incluye una observación en la nota 3 (Davis, p. 44) en la que se dice que toda función computable mediante un procedimiento finito es recursiva. Davis había supuesto que por «recursiva» se entiende «recursiva general», tal como se la define en la sección 9 de L (pp. 69-71). Pero G le comunicó a Davis en una carta que en aquel momento no estaba «convencido de que mi concepto de recursión comprenda todas las recursiones posibles» (véase Davis, p. 40). En cualquier caso, G siempre atribuyó a Turing la introducción de la primera noción precisa de procedimiento mecánico o finito, porque le parecía que éste había sido el primero en ofrecer una razón convincente de por qué la noción precisa concuerda con la intuitiva.

2.3. Esta parte ofrece una representación del sistema P mediante un sistema de enteros positivos. Incluye la asignación de «números de Gödel» y la demostración de que cuarenta y seis funciones y predicados, la mayoría de ellos de carácter metamatemático, son todos ellos menos el último, recursivos primitivos. La última entrada la constituye la propiedad no-recursiva de ser «demostrable en P». En L, esta parte constituye la sección 4, la cual no incluye más que diecisiete (en lugar de sesenta y cuatro) entradas y remite a U para los detalles.

2.4. Relaciones y funciones recursivas primitivas se muestra que son verificables (o numeralwise representable) en el sistema P. Esta parte corresponde a la primera de la sección 5 de L (la cual contiene, además, pruebas menos formales de los dos principales teoremas).

2.5. Se ofrece una prueba completamente formal de la primera incompletud.

2.6. Esta sección contempla las condiciones que ha de satisfacer un sistema formal para poder llevar a cabo la prueba (de 2.5). Corresponde a la sección 6 de L.

Al final de la sección 2, aparece la famosa nota 48a (Davis, pp. 28-29, y *FG*, p. 610):

> La verdadera razón de la incompletud inherente a todos los sistemas matemáticos formales es, como se mostrará en la parte II de este ensayo, que la formación de tipos cada vez más altos se puede proseguir hasta lo transfinito (cfr. D. Hilbert, «Über das Unendliche», *Math. Ann.*, 95, p. 184 *[FG*, p. 387]), en tanto que en un sistema formal a lo sumo se dispone de una cantidad denumerable de ellos. Por ello se puede mostrar que las proposiciones indecidibles construidas aquí resultan siempre decidibles cuando se añaden tipos más altos que resulten adecuados (e.g., el tipo ω para el sistema P). Una situación análoga se presenta para el sistema axiomático de la teoría de conjuntos.

Sección 3. Se introduce el concepto de relación aritmética para cubrir relaciones definibles en términos de multiplicación y adición con ayuda de constantes lógicas (incluidos cuantificadores que tienen como dominio números naturales). Una ingeniosa aplicación del teorema chino del residuo muestra que todas las relaciones recursivas primitivas son aritméticas. Esta parte de la sección 3 se considera en la sección 8 de L en el punto dedicado a proposiciones «diofánticas» que tienen la forma (Q) $(F = 0)$, donde (Q) representa una secuencia de cuantificadores y F la parte polinómica (de suerte que $F = 0$ es una ecuación diofántica). La reducción de las proposiciones aritméticas a diofánticas se hace eliminando negación y disyunción. La prueba de G de que todos los predicados recursivos primitivos son aritméticos brinda una elegante representación de conjuntos recursivamente enumerables. La representación desempeñó un importante papel en el estudio del décimo problema hilbertiano por Martin Davis, Julia Robinson y Yuri Matijasevic, el cual acabó llevando, en 1970, al resultado de que no hay ningún algoritmo capaz de resolver todas las ecuaciones diofánticas.

En el postscriptum (de L) se hacen dos comentarios sobre la sección 8. 1) Sobre la base de la definición dada por Turing de procedimiento mecánico, los dos resultados de incompletud (establecidos en la sección 8 con la cláusula «sobre la base de los principios de prueba empleados en la matemática de hoy») «pueden ahora probarse en la forma definitiva»: No existe *teoría formalizada* alguna que responda a todas las cuestiones diofánticas de la forma (A) $(F = 0)$, y: No hay *algoritmo* alguno capaz de decidir relaciones en las que aparezcan tanto adición como multiplicación. 2) Se anuncia un resultado no publicado. Los métodos de la sección 8 se pueden reforzar hasta expresar la proposición indecidible en la forma $A...AE...E$, seguida de una ecuación en la que la parte polinómica es de grado 4 (Davis, pp. 72-73).

La otra mitad de la sección 3 (de U) se omite en L. Consiste en una prueba de dos teoremas de la lógica elemental: X. Para toda fórmula (x) F (x), siendo F un recursivo primitivo, se puede exhibir una fórmula E de la

lógica elemental tal que E resulta satisfacible si y sólo si $(x)\,F\,(x)$ (es verdad). IX. En el sistema P (o cualquier sistema que satisfaga las condiciones establecidas por G), hay fórmulas de la lógica elemental cuya validez es indecidible. Como señala Davis, X lleva directamente a la conclusión de que el problema de la decisión para la lógica elemental (el «Entscheidungsproblem») es insoluble (Davis, p. 109).

Tras la obra realizada por Turing y otros en los años treinta, el interés pasó de las proposiciones indecidibles a los problemas insolubles. Pero, por lo que yo sé, G trabajó poco en esta área, probablemente debido a que los problemas son sobre todo técnicos y entrañan poco análisis conceptual.

Sección 4. Se ofrece un esbozo de la prueba del segundo teorema de incompletud (reseñado con el número XI). La sección (y la totalidad de U) concluye con una promesa (que nunca fue cumplida):

> En este ensayo nos hemos restringido al sistema P, y no hemos hecho más que indicar las aplicaciones posibles a otros sistemas. Los resultados serán establecidos y probados en toda su generalidad en otro que se publicará pronto. En dicho ensayo también se ofrecerá una prueba detallada del teorema XI, aquí sólo esbozada.

En la década de los sesenta, tras la palabra «pronto» G insertó una nueva nota a pie de página (*FG*, p. 616, nota 68a): «Esto explica el "I" del título del ensayo. La intención del autor era publicar esta continuación en el volumen siguiente de la *Monatshefte*. La rápida aceptación de sus resultados fue una de las razones que hicieron que cambiaran sus planes.» Creo que otra razón debió de ser la renuencia de G a elaborar laboriosos detalles que ya no eran ninguna novedad para él ni representaban avance decisivo alguno en este tema.

En el anterior resumen de U, he hecho alusión a los contenidos de siete de las nueve secciones de L. La introducción de L explica los conceptos involucrados en la especificación de un sistema matemático formal. La sección de conclusiones introduce la definición de G de función recursiva general, que desarrolla una sugerencia hecha por Herbrand (en una carta de 1931 dirigida a G).

Antes, en la sección 2.3, dramaticé un poco la respuesta de G a los cuatro problemas de Hilbert, presentados en su conferencia de Bolonia (de septiembre de 1928). En la nota 48 de U G indicaba que su primer teorema de incompletud resuelve el tercer problema

de Hilbert. Aunque, como sugerí en la sección 2.3, su segundo teorema se podría considerar como respuesta a los dos primeros problemas de Hilbert en su significado intencional, G destacaba al final de U (Davis, p. 37, y *FG,* p. 615) que el ámbito de las pruebas finitarias no se conocía con claridad: «Deseo señalar expresamente que el teorema XI (y los resultados correspondientes relativos a M [la teoría formalizada de conjuntos] y a A [la matemática clásica formalizada o teoría de números]) no contradicen el punto de vista formalista de Hilbert. Pues este punto de vista únicamente presupone la existencia de una prueba de consistencia en la que no se requiere nada más que medios finitarios de prueba, y no es inconcebible que existan pruebas finitarias no representables en P (o M o A).» [Como ahora sabemos, las pruebas finitarias en el sentido de Hilbert se pueden representar en cada uno de tales sistemas.] Desde luego, el teorema es útil para la comprobación de las pruebas de consistencia propuestas, como hicieron explícito tanto Herbrand (véase *FG,* p. 626) como Gentzen.

G siguió interesado en las pruebas de consistencia (como las de G. Gentzen), y su propio trabajo sobre teoría intuicionista de números tenía también un aspecto que se puede ver como una propuesta de pruebas de consistencia. Pero lo que se desprende de la obra de G es la implausibilidad de la idea hilbertiana de que cabe asegurar los fundamentos de la matemática de una vez por todas mediante pruebas de consistencia que empleen ciertos métodos especialmente transparentes. En lugar de eso, G buscó con éxito pruebas de consistencia *relativa* (interpretaciones, traducciones, y modelos internos). Generalmente, el aspecto informativo de las pruebas de consistencia reside no tanto en la afirmación concluyente de consistencia cuanto en la relación entre los conceptos empleados en las pruebas de consistencia y los conceptos involucrados en el sistema formal cuya consistencia se prueba. Es menos confundente y más ajustado a la situación real decir que todas las pruebas de consistencia son pruebas de consistencia relativa. Teniendo presente esta proposición, se logra un campo de problemas significativos más amplio y una mejor guía para la extracción de los elementos informativos de las pruebas dadas.

Guarda relación con esta idea de las pruebas de consistencia relativa la sugerencia contenida en el primer teorema de incompletud de una perspectiva más amplia del problema general de la determinación de los límites de los métodos de prueba dados (no necesaria-

mente codificados o totalmente codificables en los sistemas formales). Así por ejemplo, hay en la literatura trabajos sobre el rango mínimo de la teoría de conjuntos que se necesita para probar ciertos teoremas y sobre el reforzamiento de métodos necesario para probar la existencia de funciones de crecimiento rápido.

Capítulo 11

ENSAYOS FILOSÓFICOS

El centro de interés de los ensayos filosóficos publicados por G es la filosofía de la matemática. (El ensayo sobre Einstein, de 1949, brevemente analizado en la sección 6.5, era, en palabras de G, una «digresión», que no se considerará en este capítulo.) Es tradicional hablar de tres posturas: nominalismo, conceptualismo y realismo. G dice de sí mismo que es un «realista» y generalmente así es como se lo considera. Pero tales membretes encierran conocidas ambigüedades. En primer lugar, G opta por considerar los conceptos como un aspecto de la realidad objetiva y los separa de la idea subyacente al conceptualismo de que los conceptos son obra nuestra. La principal ambigüedad del conceptualismo reside, en mi opinión, en su relación con el infinito. Si una postura excluye los dominios infinitos o «deja de lado la diferencia entre finito e infinito» (BP, p. 225, donde G discute el punto de vista de Ramsey), como hace Wittgenstein en su *Tractatus,* entonces no tiene mucho que decir sobre las matemáticas (véase *BA,* pp. 97-99, 70-72, 149-151). Si se acepta la idealización de una infinidad de símbolos, entonces se llega bien al finitismo de Hilbert, bien, si se idealiza más, al «predicativismo». G parece asociar el nominalismo más bien con el predicativismo restringido a la «teoría de la inexistencia de clases» (BP, principio de la p. 215 y mitad de la 220) y creer que el nominalismo (de esta forma) no puede brindar un dominio infinito. Dada la falta de

claridad de la relación entre nominalismo e infinito, me limitaré a considerar el nominalismo en el contexto de la «teoría de la inexistencia de clases». La principal contraposición es la que media entre realismo y constructivismo, que comúnmente se identifica con el intuicionismo y se considera que incluye como parte propia el razonamiento finitario de Hilbert. El predicativismo también se puede considerar como formando parte del conceptualismo, pero en tanto que postura filosófica auto-contenida no deja de ser un tanto incoherente o incluso «oportunista» (véase más adelante). Así por ejemplo, las definiciones inductivas son constructivas pero no predicativas, mientras que la ley del tercero excluido es aceptada por el predicativismo pero no por el intuicionismo.

Dado el deseo de G de extender su realismo más allá del campo de la matemática, puede parecer más acertado contraponerlo al «idea-lismo» (en lugar de al «constructivismo»). Pero en lo que respecta a su filosofía general, G se considera a sí mismo un «idealista» (por lo que parece, más en lo que se refiere a la ontología que a la epistemología). Como el cometido principal de este capítulo es la matemática (y la lógica), me parece que es mejor atenerse a la noción más restrictiva de constructivismo, que se asocia con algunas formas de filosofía «idea-lista», de igual modo que el «convencionalismo» se asocia con filosofías «positivistas». G sólo se opone al constructivismo si éste se adopta como una postura intolerante que excluye el razonamiento no-constructivo. Valora la importancia que tiene separar claramente el razonamiento constructivo del no-constructivo en el problema de la evidencia o de los diferentes grados de certeza. Es un realista en lo que respecta a las cosas consideradas en matemáticas, pero confiere al razonamiento constructivo (divisible a su vez en tipos de distinto grado de certeza) un lugar privilegiado en el proceso de adquisición de conocimiento acerca de objetos matemáticos (e incluso en la consideración al proceso mismo).

Esta flexible e incluyente perspectiva de G muestra su excepcional talento para aprender de la experiencia histórica por medio de una valoración perspicaz y una síntesis imaginativa, como hiciera Leibniz en su tiempo, de lo que haya de bueno y esencial en las intuiciones de sus destacados predecesores. El programa de Hilbert proveyó de una formulación más clara de problemas intuitivamente básicos pero un tanto indefinidos. G respondió a la mayoría de esos problemas clarificados con sus resultados sobre las pruebas de

completud y consistencia, para las que hizo uso de los sistemas formales desarrollados fundamentalmente por Frege y Russell. Los conjuntos constructibles sintetizaban los números ordinales de Cantor con la lógica elemental de Frege (que proporciona la «definibilidad de primer orden») y la teoría russelliana ramificada de tipos. Tanto los conjuntos constructibles como la definibilidad ordinal de G también pueden considerarse como inspirados en parte en el énfasis puesto por Poincaré en las definiciones (frente a las pruebas, resaltadas por Hilbert y Brouwer). La traducción hecha por G de la teoría clásica de números al sistema de Brouwer-Heyting y especialmente su interpretación de éste no sólo revelan relaciones claras entre ambas perspectivas distintas, sino que también suponen una mejora (en lo que a evidencia intuitiva se refiere) de la interpretación del razonamiento constructivo, tal como había sido propuesta por Brouwer y Heyting.

No deja de ser curioso que Zermelo, un realista incapaz o poco dispuesto a apreciar el modo constructivo de pensamiento, fuera menos persuasivo que G poniendo de relieve la fuerza de la posición realista. Como se desprende de su correspondencia con G (en 1931) y de sus últimos comentarios (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* vol. 41, 1932, pp. 85-88), no logró comprender la prueba de incompletud de G y la juzgó carente de interés para el estudio de la adecuación de los sistemas formales (que él creía que eran obviamente inadecuados).

G no simpatiza con el convencionalismo en lo que respecta a la matemática. Es evidente que el convencionalismo entendido en el sentido de requerir la dispensabilidad teórica de conceptos introducidos por convenciones es insatisfactorio como interpretación de la matemática (véase, por ejemplo, *BA,* pp. 13-16). Cabe considerar que el último Wittgenstein introdujo una forma más sutil de convencionalismo cuando retrotrajo el consenso en matemáticas al consenso en cuanto a la «forma de vida». Esta concepción se puede considerar o no un caso de convencionalismo, pero en cualquier caso difiere de la postura de G en la medida en que deja fuera la conexión entre consenso subjetivo y realidad objetiva o quizás incluso substituye la segunda por el primero. En la práctica, el acuerdo intersubjetivo también desempeña, según la postura de G, un importante papel en la verificación de las intuiciones correctas y la eliminación de las incorrectas.

G dice explícitamente que no tenemos un conocimiento abso-

lutamente cierto. Esto parece indicar que incluso en cuestiones muy elementales no tenemos la absoluta certeza de haber captado del todo lo que dictamina la realidad objetiva, en tanto que último tribunal de apelación. De ahí que G ofrezca como elemento de juicio en favor del realismo lo que él llama «el argumento derivado del éxito», que no es sino una inferencia empírica a partir del hecho de que el realismo ha sido hasta ahora la perspectiva más fructífera. Después de todo, en último término, la fructificidad tal vez sea lo más importante que podamos pedir de una postura filosófica. No me inquieta el tono «pragmático» del argumento, porque el realismo no es en modo alguno el pragmatismo, y el argumento se puede aplicar *ad hominem* en favor del realismo: incluso desde la postura del pragmatismo, se trata de la tesis correcta. Si una teoría de la verdad como correspondencia ofrece la interpretación más coherente (en especial, más que las teorías de la verdad como coherencia), semejante hecho es, sin duda, un elemento de juicio en favor de la teoría de la correspondencia.

G da a veces a su postura el nombre de «objetivismo» en vez del de «realismo». Estamos más seguros, afirma, de que tenemos objetividad que de haber hallado los objetos correctos. Por ejemplo, estamos seguros de que hay infinitos números primos y de que la conjetura de Fermat es o bien verdadera o bien falsa. G infiere de este hecho que debe de haber objetos, pero parece decir que estamos menos seguros de que los números naturales sean los objetos «correctos». Su opinión es que elegimos qué considerar como objetos y que podría haber mejores opciones, que aún no hubiéramos hallado (especialmente en física).

Tengo un sentimiento ambivalente hacia las consideraciones hechas en términos de grandes palabras cargadas tales como «realismo», «idealismo», «fundamentalismo», «materialismo», etc. Por un lado, parecen resumir y reunir componentes interrelacionados con objeto de dar la sensación de que se están tratando cuestiones importantes. Por otro, distintos individuos tienen distintas asociaciones, y la preocupación por esos términos generalmente lo que hace es pasar por alto los aspectos más sutiles de la verdadera postura de un filósofo dado. Como consecuencia, una parte mayor de lo normal de las discusiones en tales términos incurren en malentendidos (a causa de distintas asociaciones terminológicas) y no aportan nada sustantivo. Me parece que posturas alternativas (o incluso opuestas), a medida que se van haciendo cada vez más matizadas,

tienden a converger hacia algo que se adecua más a los hechos.

G publicó durante su vida cinco ensayos filosóficos. En este capítulo no consideraré el ensayo sobre Einstein (1949), que se analizó brevemente en la sección 6.5. La conferencia de Princeton de 1946 (publicada por primera vez en 1965, y recogida en 1968 con cambios de expresión insignificantes), resumida en el capítulo 4 (epígrafe *1946*), se solapa en parte con el ensayo sobre Cantor y la discusión de los «procedimientos mecánicos» de *MP*. No será considerada en este capítulo.

La parte explicitada de las ideas de G sobre la filosofía de la matemática y de la lógica se halla contenida principalmente en sus tres ensayos (que analizan el pensamiento de Russell, Cantor y Bernays), así como en el material de *MP* y de sus conversaciones. El ensayo sobre Bernays (publicado en alemán en 1958 y del que existe, en galeradas, una versión inglesa mucho más amplia, que será publicada en breve en el segundo volumen de *CW*) ilustra la extraordinaria combinación que se da en G de realismo y un fuerte interés por, y un penetrante dominio del, modo constructivo de pensamiento. Aborda el problema de la evidencia en conexión con el finitismo de Hilbert y el intuicionismo de Brouwer (fundamentalmente en el campo de los números naturales, tal como había sido expuesto por Heyting, y su relación con la matemática clásica. El ensayo sobre Cantor (publicado en 1947 y del que existe una versión revisada y ampliada de 1964) tiene por objeto la teoría de conjuntos (centrándose en el problema del continuo), pero ofrece también una breve y destacada exposición del realismo matemático de G. El ensayo sobre Russell (1944), el primer ensayo filosófico de G, es el de más amplio alcance. Incluye observaciones sobre la naturaleza e historia de la lógica matemática, la teoría de las descripciones, el principio del círculo vicioso y la predicatividad, la teoría de conjuntos, la teoría de conceptos, la analiticidad, y la idea leibniziana de característica universal.

En *MP* y en otros lugares de este libro se recoge más información sobre las ideas de G acerca de la naturaleza de la lógica, la teoría de conceptos, la teoría de conjuntos y su realismo y objetivismo. Así por ejemplo, de las conversaciones con G, pero no así de sus publicaciones, se desprende que la lógica es para él más amplia que la matemática (o teoría de conjuntos). Las actitudes aparentemente conflictivas de G hacia las paradojas, mantenidas en los ensayos sobre Russell y Cantor, son esclarecidas por él en *MP* (pp. 187-188).

«La diferencia de énfasis, como aclara Gödel, se debe a una diferencia de objeto de estudio, toda vez que el ensayo sobre Russell se ocupa todo él de lógica, más que de matemáticas. El concepto pleno de clase (verdad, concepto, ente, etc.) no se emplea en matemáticas, y el concepto iterativo, que es suficiente para la matemática, puede ser o puede no ser el concepto pleno de clase.» No obstante, el concepto que G tiene de clase parece haber cambiado un tanto con los años. En sus últimas conversaciones (que se recogerán en *CG*), él tomó las clases sólo como un derivado subsidiario de los conceptos. También propuso suprimir del artículo sobre Russell la oración, «Puede ocurrir incluso que el axioma de extensionalidad o al menos algo similar a él valga para conceptos» (BP, p. 22). En 1975 creía que el axioma de extensionalidad sólo vale para conceptos en casos excepcionales y que, por consiguiente, las clases no tienen una importancia fundamental para la teoría de conceptos.

En términos de objetos (o cosas) sabemos menos a medida que pasamos de los números pequeños a la totalidad de los enteros, el continuo, los conjuntos y los conceptos. En cuanto al razonamiento, contamos con una percepción más intuitiva cuando operamos con números pequeños. El grado de certeza disminuye a medida que pasamos de la matemática finitista a la intuicionista y a la clásica. Y aparece un (mayor) grado de incertidumbre a medida que pasamos de la matemática clásica a la teoría de conjuntos —sólo a medida que la matemática se va desarrollando, aumenta la certeza global, aunque los grados relativos se mantienen iguales. (Estas observaciones fueron en su mayoría hechas por G el 5 de febrero de 1976; véase *CG.*) Desde esta perspectiva, las escuelas contendientes se reducen a componentes característicos de una perspectiva global en la que se confiere un lugar adecuado a sus relaciones y méritos respectivos. Los temas de los tres ensayos pueden verse así en un orden natural. El ensayo sobre Bernays conecta la evidencia intuitiva fuerte con los razonamientos constructivo y clásico. El ensayo sobre Cantor conecta la matemática clásica con la teoría de conjuntos. Y el ensayo sobre Russell fluctúa entre la teoría de conjuntos y la teoría de conceptos (incluyendo también una comparación entre sus interpretaciones nominalista y realista, estimulada por la ambigua actitud mantenida por Russell hacia ambas perspectivas).

11.1. El problema de la evidencia

Resulta adecuado comenzar por el artículo sobre Bernays, «Sobre una extensión de una matemática finitaria que no se ha empleado todavía». La versión alemana se publicó en 1958, *Dialectica,* vol. 12, pp. 280-287. A finales de los sesenta G escribió una versión ampliada en inglés, que estaba en galeradas en 1970, momento en que G decidió retenerla para revisarla. Ambas versiones aparecerán en el segundo volumen de *CW.* En esta sección echaré mano de la versión inglesa (que ha circulado privadamente). El contenido del ensayo fue resumido en el *abstract* añadido a la versión inglesa del siguiente modo:

> P. Bernays ha señalado que, para poder probar la consistencia de la teoría clásica de números, es preciso extender el punto de vista finitista hilbertiano admitiendo ciertos conceptos abstractos además de los conceptos combinatorios referentes a símbolos. Los conceptos abstractos usados hasta ahora para este fin son los de la teoría constructiva de los ordinales y los de la lógica intuicionista. [Aquí] se muestra que, en lugar de esto, se puede emplear el concepto de función computable de tipo simple finito sobre el dominio de los enteros, no necesitándose otros procedimientos de construcción de tales enteros salvo la recursión simple mediante una variable de entero y la substitución mutua de funciones (empezando por las funciones triviales).

La primera oración contradice la afirmación de G de 1930, según la cual, «cabe pensar que existen pruebas finitarias no susceptibles de ser expresadas en el formalismo de» la teoría clásica de números (llamemos N a este sistema), etc. (citado antes, *CW,* I, p. 195), si empleamos la concepción hilbertiana original. En concreto, Bernays ha destacado esta consecuencia del segundo teorema de G en diversos lugares (como se indica en la nota 1 del artículo que estamos considerando). En este artículo, G considera modos alternativos de ir más allá de la matemática finitaria (de Hilbert) para llegar a una prueba de consistencia de N y propone una forma nueva y más clara de hacerlo. El método de G se considera una interpretación, por medio de «funcionales recursivos primitivos», de la teoría intuicionista de números, tal como se formula en el sistema H de Heyting. Para ello, G establece un sistema formal T y ofrece una interpretación de las fórmulas de H en T de suerte que todos los teoremas de H se convierten en teoremas de T en su forma interpre-

tada. Por medio de esta reducción, de 1932, de N a H (Davis, pp. 75-81), la consistencia de N se reduce a la de T, cuyos axiomas «son, desde el punto de vista formal, prácticamente los mismos que los de la teoría recursiva primitiva de números». «El sistema T tiene la misma capacidad deductiva que un sistema de teoría de números en el que se permite la inducción completa para todos los números ordinales menores que ε_0.

11.1.1. *La matemática finitaria de Hilbert*

G basa su consideración en la exposición de Hilbert de 1925 (*Math. Ann.*, vol. 95, pp. 170-173, traducción inglesa en *FG*, pp. 377-379). Según G, esta exposición define la matemática finitaria como «la matemática de la *intuición concreta*», y G contrapone la evidencia concreta a la abstracta. En este contexto, «intuitivo» se entiende en un sentido restringido de suerte que, en consecuencia, buena parte de lo que en otros lugares se considera «intuitivo» (desde luego, en la teoría de conjuntos) se convierte en «abstracto», *i.e.* en algo que está más allá de la intuición concreta. Permítaseme citar la nota h en su totalidad:

> *«Intuición concreta», «concretamente intuitivo»* se emplean como traducciones de «Anschauung», «anschaulich». En este artículo se emplean también en este sentido los términos simples *«concreto»* o *«intuitivo»*. Lo que Hilbert entiende por «Anschauung» es básicamente la intuición espacio-temporal kantiana confinada, no obstante, a configuraciones de un número finito de objetos discretos. Observemos que es la insistencia de Hilbert en el conocimiento *concreto* lo que hace tan débil a la matemática finitaria, haciendo que excluya muchas cosas que son tan incontrovertiblemente evidentes para cualquiera como la misma teoría finitaria de números. E.g., aunque cualquier definición recursiva primitiva es finitaria, el principio general de la definición recursiva primitiva no es una proposición finitaria, porque contiene el concepto abstracto de función. No hay nada en el término «finitario» que sugiera un confinamiento al conocimiento concreto. Lo único que introduce este confinamiento es la especial interpretación que Hilbert le da.

La contraposición entre las concepciones hilbertiana y kantiana no sugiere, a mi entender, que la concepción kantiana sea más amplia en lo que se refiere a la teoría de números. Más bien indica que

Hilbert se está ocupando (aquí) únicamente de un aspecto de la concepción kantiana (dejando fuera, por ejemplo, ciertas partes que sólo tienen que ver con la geometría). En otras palabras, G está afirmando, yo creo que correctamente, que Kant y Hilbert comparten un concepto restringido de matemática finitaria, que es la única parte de la matemática discreta que para ellos es intuitivamente evidente. Esta es la razón por la que G considera del todo inadecuada la filosofía kantiana de la matemática (como he contado en otros lugares de este libro). En especial, aunque Brouwer afirma aceptar la noción kantiana, emplea una noción de intuición más amplia que la de Kant.

La matemática finitaria de Hilbert sirve para ilustrar dos aspectos del modo de aproximación de G a la filosofía. De una parte, una vez que algo se reconoce o acepta como evidente, invita a ulteriores extensiones (como G hace ver mediante el ejemplo de las funciones recursivas primitivas). De otra, como G destaca en otros contextos, regiones tan absolutamente bien definidas como las de Hilbert son valiosos instrumentos para el estudio del funcionamiento y expansión de nuestra intuición y de lo que se puede tomar como evidente. El uso que G hace de la matemática finitaria en su ensayo confiere a su comparación entre modos alternativos de clarificar el sistema N un marco de referencia que aumenta la claridad de todo su análisis.

Según G (véase BP, pp. 280-282, 285-286), Bernays nos enseña a «distinguir dos elementos componentes en la noción de matemática finitaria». El elemento constructivista impone a los objetos o hechos matemáticos la restricción de que «se puedan exhibir o construir mediante la construcción de una prueba». El elemento específicamente finitista «exige además que los objetos y hechos considerados se den en la intuición matemática concreta»; los objetos «han de ser configuraciones espacio-temporales finitas de elementos cuya naturaleza es irrelevante salvo en lo que respecta a su igualdad o diferencia». «Es el segundo requisito el que debe ser abandonado.» Las formas existentes de hacerlo para llegar a N son mediante la reducción a H, mediante inducción transfinita a ε_0, y la nueva reducción hecha por G de H a T. G, en sus notas 3, 4, i, j, y en las partes del texto con las que tales notas se hallan relacionadas, examina minuciosamente la segunda de estas alternativas empleando ordinales constructivos y la cuestión afín de la accesibilidad. El examen, dice, pone «sobradamente de manifiesto» que la consistencia

de N no se puede probar por métodos hilbertianos, aunque necesitemos «una definición precisa de evidencia concreta o abstracta».

En contraposición a la matemática de la intuición concreta, los conceptos abstractos «no tienen como contenido propiedades o relaciones de *objetos concretos* (como, por ejemplo, combinaciones de símbolos), sino más bien de *estructuras de pensamiento* o *contenidos de pensamiento* (e.g., pruebas, proposiciones significativas, y cosas por el estilo)». En «las proposiciones acerca de tales objetos mentales se requieren intuiciones que no se derivan de una reflexión sobre las propiedades (espacio-temporales) combinatorias de los símbolos que los representan, sino más bien de una reflexión sobre los *significados* involucrados». G pone como ejemplo, en la nota a, la interpretación de *«p* implica *q»* como «De una prueba convincente de *p* se puede derivar una prueba convincente de *q*».

Tenemos aquí los símbolos (y sus combinaciones), sus propiedades combinatorias, sus significados (o nuestras intenciones), nuestras reflexiones sobre lo uno o lo otro, y las ideas derivadas de tales reflexiones. Los objetos concretos se contraponen a los contenidos de pensamiento. Si uno insiste en adherirse a las distinciones tradicionales, el confinamiento a las propiedades combinatorias se puede decir que supone una postura nominalista, en tanto que detener la expansión ante los contenidos de pensamiento puede decirse que constituye la postura conceptualista, que es más incluyente. La postura realista de G no excluye en modo alguno la reflexión sobre las propiedades combinatorias y los contenidos de pensamiento, sino que llega a admitir idealizaciones adicionales y a atribuir el contenido último de nuestra reflexión a características (generales) de la realidad objetiva.

Como mi cometido es fundamentalmente el aspecto filosófico del ensayo de G, no voy a considerar los detalles técnicos de T ni la reducción de H a T. G centra T en el concepto de «función computable de un tipo (finito cualquiera) t» y observa en la nota b que las funciones de Turing «también satisfacen los axiomas del sistema T». Guarda relación con esto la observación que G hace en la nota [6] sobre la definición de Turing:

> Esta definición no era en modo alguno superflua. Pero, si el término «mecánicamente computable» no hubiera tenido antes un significado claro, aunque no-analizado, la cuestión referente a si la definición de Turing es o no es adecuada hubiera carecido de sentido, siendo así que tiene una respuesta indudablemente afirmativa.

Esto tiene que ver con lo que G piensa acerca de la percepción de conceptos (véase *MP,* pp. 84-86). En la nota k, G observa en relación con el progreso conceptual que supone T sobre H: «Es probable que este mismo modo de evitar el uso de la lógica de Heyting o el concepto general de prueba se pueda aplicar también a la interpretación de T en términos de funciones de Turing, véase la nota b.» Al final de la nota k se hace alusión también a una posible ventaja que se derivaría del empleo sustitutorio de las funciones de Turing.

El ensayo concluye con la observación de que, partiendo de las mismas ideas básicas, se pueden construir sistemas mucho más fuertes que T. Como ejemplos, G incluye extensiones resultado de admitir tipos transfinitos o (si no) métodos brouwerianos de deducción (o su principio) para probar su «teorema del abanico» (Heyting, *Intuitionism,* 1956, p. 42). La última alternativa ha sido seguida por Spector, después de 1958, para derivar la consistencia del análisis clásico a partir de una forma abstracta del principio de Brouwer. En su nueva nota m, G menciona el trabajo de Spector y dice, «Desgraciadamente, no se conoce ninguna prueba constructivista satisfactoria para ninguno de los dos principios [a saber, el de Brouwer y la variante de Spector]». G dice en la nota a modo de conclusión, «La más prometedora extensión del sistema T acaso sea la obtenida mediante la introducción de *funciones computables de ordinales constructivos* de tipo más alto».

El principal cometido de la versión ampliada del artículo es explicar por qué T es más evidente que H. La larga nota nueva k elabora la 5 señalando que la interpretación que G hace de la lógica intuitiva emplea un concepto de prueba «muchísimo más estricto» que el de Heyting y evita el cuantificar sobre «cualquier» prueba. Los axiomas y reglas de T se pueden probar, observa G, empleando lo que él llama el concepto más estricto de «prueba reductiva», que no es sino «una cadena ininterrumpida de evidencias inmediatas». Una o dos veces subrayó G, creo recordar, que en la nota k sus ideas sólo están bosquejadas, ya que las pruebas de sus aserciones son enormemente largas y complejas.

Cuando transpasamos el marco de la teoría de números, el continuo (y el análisis clásico) constituye indudablemente, tanto conceptual como históricamente, el puente que lleva a la teoría de conjuntos. Por lo demás, dado el desarrollo cantoriano de los números infinitos, el número cardinal del continuo (*i.e.,* el problema del

continuo) era una de las primeras cuestiones a plantearse. Cantor conjeturó en 1878 que se trata del número cardinal no-denumerable más pequeño (*Gesammelte Abhandlungen,* 1932, p. 132). Hoy día sigue sin saberse si la conjetura (la «hipótesis del continuo») es verdadera o falsa. Es indudable que G dedicó a este problema, en sus aspectos tanto matemáticos como filosóficos, más energía que a cualquier otro (cualquier otro de carácter matemático, naturalmente).

11.2. Cantor y la teoría de conjuntos

El ensayo filosófico de G sobre este tema es «What is Cantor's continuum problem?». Se publicó por primera vez en *Am. Math. Monthly (AMM),* vol. 54, 1947, pp. 515-525; una versión corregida y ampliada aparece en BP, 1964, pp. 258-273 (recogida en BP2, 1983, pp. 470-485). G alude a las dos versiones como la primera y la segunda edición. Las referencias de esta sección serán a BP, y también a *AMM* cuando compare ambas versiones. [Los que hagan uso de BP2 han de añadir 212 o 213 al número de página de BP.]

La versión aumentada consta de siete partes:

1. El concepto de número cardinal (pp. 258-259).
2. El problema del continuo, la hipótesis del continuo y los resultados parciales obtenidos hasta ahora acerca de su verdad (pp. 260-261).
3. Replanteamiento del problema sobre la base de un análisis de los fundamentos de la teoría de conjuntos y de lós resultados obtenidos siguiendo esta línea (pp. 261-265).
4. Algunas observaciones acerca de la cuestión, ¿En qué sentido y en qué dirección cabe esperar una solución del problema del continuo (pp. 265-168)?
5. Definiciones de algunos de los términos técnicos (pp. 268-269).
6. Suplemento a la segunda edición (pp. 26-272).
7. Postscriptum (p. 273).

En los años setenta, G afirmó haber escrito este artículo con objeto de cambiar la renuencia entre los matemáticos a trabajar en teoría de conjuntos, debido al gran recelo que despertaba este tema por asociarse con las paradojas. La sección 1 muestra que el problema del continuo es un problema bien definido, y la 2 reseña la «escasez

de resultados». En 3 se considera el concepto iterativo de conjunto, después de sugerir la necesidad de «un análisis más profundo (que el que la matemática suele ofrecer) de los términos que aparecen en «la más fundamental de las cuestiones planteadas en este campo. En 4 se ofrecen dos razones en apoyo de la idea de G de que el problema del continuo no es solucionable a partir de los axiomas aceptados. El suplemento 6 comienza con un resumen de los resultados relevantes obtenidos entre 1947 y 1963, y pasa luego a elaborar las razones, dadas en la primera edición, de por qué la verdad del problema del continuo no perdería su sentido, «aún en el caso de que resultara ser indecidible sobre la base de los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos». El postscriptum 7 se añadió en 1963 para señalar que Paul J. Cohen había probado la independencia de la hipótesis del continuo «poco después de cerrar el manuscrito de este artículo». Hay que señalar que el resultado de Cohen no afectó al contenido del artículo de un modo sustantivo.

Según G, la parte principal de 3 y 6, junto con sus contribuciones a *MP,* constituyen la principal formulación publicada de su realismo matemático. Tanto en 3 como en 1 se insiste en el análisis de conceptos matemáticos. Las consideraciones de 1 ofrecen una ilustración de la idea favorita de G de que los conceptos (matemáticos), en este caso los números infinitos, tienen el «carácter de univocidad». No es sorprendente que los conjuntos constructibles desempeñen un papel central en las deliberaciones de G, especialmente en 4. En 3 se propone el programa de buscar nuevos axiomas, en especial fuertes axiomas de infinitud (que afirmen la existencia de cardinales muy grandes).

El artículo se inicia con dos sencillas formulaciones equivalentes del problema cantoriano del continuo: ¿Cuántos puntos hay en una línea recta en el espacio euclídeo? ¿Cuántos conjuntos diferentes de números enteros existen? La cuestión presupone una extensión del concepto de número a conjuntos infinitos. Un requisito (o axioma) básico del concepto es el siguiente: «El número de objetos perteneciente a alguna clase no cambia si, sin cambiar los objetos, se cambian de un modo y otro sus propiedades o relaciones mutuas (e.g., sus colores o su distribución en el espacio). «De ahí que», prosigue G, «dos conjuntos tengan el mismo número cardinal si sus elementos se pueden poner en una correspondencia biunívoca». En este contexto G emplea una de sus formas favoritas de razonar; «Tales consideraciones es cierto que sólo se aplican a objetos físicos,

pero una definición... que dependa del tipo de objetos que se numeran difícilmente puede considerarse satisfactoria».

La definición cantoriana de igualdad entre números puede extenderse «(también aquí sin ninguna arbitrariedad)» a la relación de mayor-menor y a las operaciones aritméticas familiares. En concreto, la prueba diagonal de Cantor establecía que el número de subconjuntos de un conjunto es siempre mayor que el número de sus elementos. Además, el problema de identificar el número cardinal de un conjunto individual requiere «alguna representación sistemática de los números cardinales infinitos». Esto depende del teorema cantoriano de que hay exactamente un cardinal siguiente para cada (conjunto de) cardinal(es), así como del «teorema de la buena ordenación», que no fue probado por Zermelo hasta 1904, con la introducción del axioma de elección, cuando Cantor había abandonado en lo esencial su trabajo en teoría de conjuntos. Aquí G interrumpe el desarrollo histórico y señala que el axioma (de elección) está tan bien fundamentado como los demás axiomas, refiriéndose también a su prueba de consistencia.

En 1883, Cantor escribió, «Siempre es posible expresar un conjunto *bien definido* en la forma de un conjunto *bien ordenado*. Volveré sobre esta ley en una memoria posterior». *Abhandlungen,* p. 169. Aunque el teorema de la buena ordenación era central para toda la teoría cantoriana de los números infinitos y era considerado por él como intuitivamente verdadero, Cantor nunca logró una prueba plenamente satisfactoria (ni siquiera para él mismo). Una aproximación a ella que se ha discutido mucho se halla contenida en una de sus cartas de 1899 a Dedekind *(ibíd.,* p. 447). [La extensa literatura relacionada con la vida y la obra de Cantor incluye Jean Cavaillés, *Philosophie Mathématique,* 1962 (que consta de tres partes todas ellas compuestas hacia 1941); H. Meschkowski, *Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors,* 1967; J. Dauben, *George Cantor,* 1979, y M. Hallett, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size,* 1948.]

En 2 G establece la hipótesis cantoriana del continuo en su forma usual y ofrece también la formulación alternativa: «Todo subconjunto infinito del continuo tiene la potencia del conjunto de enteros o de todo el continuo.» Luego destaca la escasez de resultados y observa que el problema es tan sólo una cuestión de «tabla de multiplicar» de números cardinales. Esta sorprendente situación le lleva a la idea de buscar un análisis más profundo de conceptos, tarea

que, de acuerdo con la concepción de G, es enteramente filosófica. Más tarde volveré sobre el desarrollo que G hace de esta sugerencia en 3.

En 4 G ofrece dos razones para su conjetura (de 1947) de que el problema del continuo no puede resolverse a partir de los axiomas aceptados. En primer lugar, hay dos clases de objetos diferentemente definidas que satisfacen tales axiomas: los conjuntos constructibles y «los conjuntos entendidos en el sentido de multitudes arbitrarias, al margen de si o cómo se los pueda definir». [Teniendo en cuenta el hecho de que ciertas multitudes (grandes) no son conjuntos, a G acaso le gustara cambiar el término «multitudes» por «extensiones».] «Ahora bien, antes de que se haya establecido qué objetos han de ser numerados y sobre la base de qué correspondencia biunívoca, difícilmente podemos esperar ser capaces de determinar su número, salvo en el caso de que se dé alguna afortunada coincidencia. No obstante, si uno cree que no tiene sentido hablar de conjuntos excepto como extensiones de propiedades definibles, tampoco puede esperar que se puedan resolver más que una pequeña parte de los problemas de la teoría de conjuntos sin hacer uso de esta característica de los conjuntos, esencial en su opinión, a saber, que son extensiones de propiedades definibles.» Así pues, desde cualquier punto de vista, el problema del continuo «puede ser solucionable con ayuda de algún nuevo axioma que afirme o implique algo sobre la definibilidad de los conjuntos».

En este punto, G alude al concepto de definibilidad en el sentido de sus conjuntos constructibles y al «axioma» (llamado «A») de que todo conjunto es constructible. Y se refiere a su resultado de que la hipótesis (generalizada) del continuo se sigue de A. Establece (en la nota 22, p. 522 de *AMM*) que «la negación de la conjetura de Cantor tal vez se pueda derivar de un axioma [directamente] contrapuesto a éste en algún sentido». Esta nota se modifica en la segunda edición con el añadido (BP, p. 266, nota 23), «Estoy pensando en un axioma que (similarmente al de la completud de Hilbert para la geometría) estableciese alguna propiedad máxima del sistema de todos los conjuntos, igual que A establece una propiedad mínima. Obsérvese que parece que sólo una propiedad máxima armonizaría con el concepto [iterativo] de conjunto explicado en la nota 14».

G no ofrece ninguna indicación del modo en que se podría formular un axioma máximo razonablemente preciso. Como es sabido, el «axioma de completud» hilbertiano (para la geometría) no es

más que una declaración de intenciones a partir de la cual no se puede hacer ninguna deducción precisa. Otro rasgo enigmático es el uso que G hace del término «axioma». El parece aceptar que A y el «axioma máximo» no pueden ser ambos verdaderos, y afirma explícitamente que sólo el segundo «parece armonizar con» el concepto de conjunto buscado. De ahí que, conforme a este uso, un axioma (en concreto «A») pueda ser bien una proposición falsa, bien al menos una proposición de la que aún no se sepa concluyentemente que es falsa. Por ejemplo, en la nota 20 (BP, p. 264, que es una versión ampliada de la nota 19 de la p. 520 de *AMM*) menciona que A es contradicho por uno de los nuevos axiomas de infinitud [el que afirma la existencia de un cardinal mensurable] y añade, «Sin embargo aún no se ha esclarecido que estos axiomas estén implicados por el concepto general de conjunto en el sentido en que lo están los de Mahlo». Esta oración fue escrita hacia 1962. La actitud de G en los años setenta me parece que indica una gran inclinación a creer que A es de hecho falso.

«El segundo argumento en favor de la insolubilidad del problema del continuo sobre la base de los axiomas usuales» depende de la interpretación intuitiva de G (que ha sido ampliamente cuestionada) de algunos de los resultados («hechos») matemáticos como indicando que la conjetura de Cantor resultará ser errónea. Mas, como de su resultado de consistencia se sigue que la conjetura no puede ser refutada a partir de los axiomas usuales, la verdad de que es falsa no puede probarse. Por consiguiente, la conjetura ha de ser independiente de los axiomas usuales. (La propia conjetura de G implica aquí de nuevo la falsedad de A.) G concluye su análisis de la primera edición afirmando «que el papel del problema del continuo en la teoría de conjuntos sería llevar al descubrimiento de nuevos axiomas que hagan posible la refutación de la conjetura de Cantor». [Esta afirmación fue incluida en ambas ediciones (1947 y 1964). Pero en 1976 me confesó que la conjetura tal vez fuera verdadera y que en ese caso creía que la potencia del continuo habría de ser aleph-uno o aleph-dos.]

Los cambios más importantes de la primera a la segunda edición fueron los introducidos en 4. Se suprimió su sugerencia de una axiomatización alternativa de la teoría de conjuntos en términos de números ordinales, su relación de ordenación y la noción de «función de ordinales recursivamente definida» (*AMM*, p. 522, las doce líneas del comienzo y la nota 24). Posiblemente la supresión se de-

bió en parte a que algún lógico publicó, en los años cincuenta, un sistema así, sin aludir al parecer a este pasaje. Otra larga supresión fue la primera publicación de G de sus resultados sobre «definibilidad ordinal» (*AMM*, p. 523, líneas 6-7 y la larga nota 26), redescubierta por varios autores en la década de los sesenta. (En la primera edición hay varias erratas que son consecuencia de la costumbre de G de hacer referencias cruzadas. En la nota 20, «notas 13 y 19» debe ser «notas 15 y 23». En la nota 23, «nota 13» debe ser «nota 15». Por lo demás, la observación sobre los implausibles resultados en el tema de la teoría de conjuntos, del último parágrafo de la sección, se desarrolla en BP en la p. 86.)

Las partes fundamentalmente filosóficas del ensayo de G son las secciones 3 y 6. Muchos filósofos han analizado y discutido este o aquel aspecto de tales secciones, en las que se presentan diversas facetas intrincadamente relacionadas de las ideas de G. La postura realista de G se contrapone a las de Brouwer, Poincaré y H. Weyl. El concepto iterativo (o extensional) de conjunto se describe brevemente y se contrapone a lo que podríamos llamar el concepto de conjunto «bifurcatorio» (o tal vez intensional). Se distinguen la lógica (y la epistemología) y las matemáticas. Se destacan tanto las ventajas como los inconvenientes de considerar la deducibilidad formal. Se dedica mucha atención a mirar más allá de la (conjeturada) indecibilidad de la hipótesis del continuo sobre la base de los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos; la cuestión de su verdad sigue siendo significativa y la tarea estriba en hallar nuevos axiomas. En la segunda edición, se dicen más cosas de la intuición matemática (en un sentido que transciende al empleado en la sección anterior) y sobre la existencia objetiva de sus objetos.

11.2.1. *Constructivismo y realismo*

El intuicionismo de Brouwer y el punto de vista semiintuicionista de Poincaré y Weyl no preservan mucho de la teoría de conjuntos. «Sin embargo, esta actitud negativa hacia la teoría cantoriana de conjuntos y hacia la matemática clásica, de la que no es sino una generalización natural, no es en modo alguno un resultado necesario de un examen de sus fundamentos, sino únicamente una consecuencia de cierta concepción filosófica de la naturaleza de la matemática que admite objetos matemáticos sólo en la medida en

que sean interpretables como nuestras propias construcciones, o al menos, puedan ser completamente dados en una intuición matemática» (BP, p. 262). La concepción así de sucintamente caracterizada de G es lo que normalmente se considera la postura de un conceptualista o constructivista. La caracterización se centra en los «objetos matemáticos», y parece ser hecha desde una perspectiva realista, ya que emplea la expresión «sólo en la medida». Esto parece indicar que hay otros objetos matemáticos, que el constructivista no admite porque no satisfacen su criterio. La frase «completamente dados en una intuición matemática» tiene distintos significados para distintas perspectivas. Por ejemplo, como se mantiene en la sección 11.1, la intuición en el sentido de Hilbert es más restringida que en el de Brouwer, y la interpretación que G hace del sistema intuicionista H es más intuitiva que la de Heyting. Desde la perspectiva del propio G, parece evidente que él no sólo parte de un concepto de intuición más amplio que el del intuicionista, sino que además admite la continua expansión de nuestra intuición. Estas diferencias tienen que ver, creo yo, con su postura realista.

Un «realista» (matemático) es, según G, «alguien que considera que los objetos matemáticos existen independientemente de nuestras construcciones y de que tengamos individualmente una intuición de ellos, y que exige únicamente que los conceptos generales matemáticos sean lo suficientemente claros como para que seamos capaces de reconocer su corrección y la verdad de los axiomas que les conciernen». Consideremos primero la parte acerca de la existencia independiente. Esto hace posible reconocer y «tener intuición» de los objetos matemáticos así como de sus principios generadores, aun cuando no estén «completamente dados en una intuición matemática». De ahí que la postura realista brinde un campo más amplio de objetos matemáticos y un concepto más amplio de intuición.

No está del todo claro cómo se relaciona la parte relativa a los conceptos y a sus axiomas con la relativa a la existencia objetiva. Si el concepto general es el concepto de conjunto, entonces las consideraciones de *MP* (pp. 181-187) pueden ser tomadas como una ilustración de cómo llegamos a ver nuevos conjuntos (objetos matemáticos) a través del reconocimiento de la «corrección» del concepto de conjunto y de la verdad de los axiomas que le conciernen. En este caso, el empleo de «campos intuitivos» entraña un caso especial de «intuición» que está más allá de la (concreta) intuición kantiana

o hilbertiana, pero que no cubre todos los modos de constituir conjuntos. (Como ha señalado Charles Parsons, el término «sólo» de la mitad de la p. 182 debe ser borrado.) G incluye también principios «abstractos» que ya no emplean dominios intuitivos (*MP*, pp. 189-90). Pero una vez que algún principio así nos convence de que cierto conjunto (que no es un «dominio intuitivo de variabilidad») existe, podemos decir que tenemos una intuición de que existe. A mí me parece posible que, a medida que mejore nuestra intuición, también se manifieste en algún estadio que semejante conjunto constituye un «dominio intuitivo». Esto está relacionado con la interacción entre intuiciones e idealizaciones.

G pasa luego a afirmar (BP, p. 262) que, en cualquier caso, desde esta posición (realista) «existe un fundamento satisfactorio de la teoría cantoriana de conjuntos en toda su extensión y sentido originales», a saber, el concepto iterativo de conjunto. A un bosquejo de este «fundamento» siguen una serie de comentarios sobre el problema matemático estricto de decidir la conjetura de Cantor a partir de la lista parcial existente de axiomas formulados, que constituyen un subconjunto de los «axiomas subyacentes al uso irrestricto de este concepto de conjunto» (p. 263). Según G, «la cuestión de si cierta proposición dada se sigue de ellos se puede transformar, mediante la lógica matemática, en un problema puramente combinatorio acerca de la manipulación significativa de símbolos al que hasta el intuicionista más radical tiene que considerar significativo». Este no es sino un ejemplo de la práctica empleada por G consistente en dedicar atención y resaltar la importancia de sus problemas y resultados no sólo para sus propias teorías sino también para puntos de vista filosóficos alternativos. En este caso, el término «significativo» es ambiguo; el problema de deducir la hipótesis del continuo sólo es significativo para el intuicionista en el muy limitado sentido de que admite una respuesta clara, no en el sentido de que sea importante.

De las cuatro posibilidades *a priori*, G empieza por apartar (en la nota 17) la alternativa más drástica: «En caso de que los axiomas fueran inconsistentes, la conjetura de Cantor sería a la vez demostrable y refutable. De las tres alternativas restantes, el resultado del propio G había mostrado que la conjetura no es refutable. Las alternativas posibles (en 1947 y hasta finales de 1963) eran que fuera demostrable o indecidible. «La tercera alternativa *[vid.*, que sea indecidible] (que sea sólo una formulación precisa de la extraña conjetura

de que las dificultades del problema no son, probablemente, puramente matemáticas), es la más probable. Buscar una prueba de esto, tal vez sea, en este momento, el modo más prometedor de abordar el problema.» Como es bien sabido, Paul J. Cohen siguió con éxito este «modo más prometedor» para probar la independencia de la conjetura en 1963; combinando esto con el primer resultado de G, la indecidibilidad conjeturada por G se veía así confirmada en 1963. Pero la idea filosófica de G es que el problema (de que la conjetura sea verdadera o falsa) sigue siendo un problema significativo y abierto, sirviendo de estímulo para la búsqueda de nuevos axiomas. Volveré sobre este tema más adelante.

11.2.2. *El concepto iterativo de conjunto*

G mete muy diversas cosas en el parágrafo dedicado a esbozar este concepto. Las paradojas «son un problema muy serio pero no para las matemáticas, sino para la lógica y la epistemología». Como antes he dicho, G distingue entre la matemática (teoría de conjuntos), que se ocupa de extensiones, y la lógica (teoría de conceptos), que trata de intensiones. En concreto, un conjunto no puede nunca pertenecer a sí mismo y no hay ningún conjunto universal, mientras que un concepto puede aplicarse a sí mismo y existe el concepto universal (el concepto de concepto, que se aplica a sí mismo). Todavía no tenemos un concepto de concepto que sea tan claro como el concepto (iterativo) de conjunto, ni tampoco tenemos una buena comprensión intuitiva de las paradojas intensionales (tales como el concepto de todos los conceptos que no se aplican a sí mismos).

Sin embargo, este concepto de conjunto, según el cual un conjunto es algo obtenible a partir de enteros (o cualesquiera otros objetos bien definidos) por aplicación iterada de la operación «conjunto de», y no algo obtenible dividiendo la totalidad de cosas existentes en dos categorías, no ha conducido nunca a antinomias de ningún tipo, es decir, el trabajo absolutamente «ingenuo» y acrítico con este concepto de conjunto ha resultado hasta ahora completamente autoconsistente. [Hay una nota relacionada con «la operación "conjunto de"» que, en la primera edición concluye con «pero, por contraposición al concepto de conjunto en general (si lo consideramos como primitivo) tenemos una idea clara de esta operación». Esta cláusula (y por tanto la contraposición) fue suprimida en la segunda

edición.] Al contraponer el concepto iterativo de conjunto con el «bifurcatorio» (que en la literatura se conoce con el nombre de teoría «ingenua» de conjuntos), G parece estar pensando en Frege. El uso por parte de G del término «ingenuo» indica un criterio de la corrección de un concepto. Si se capta el concepto intuitivo, entonces cabe esperar poder trabajar con él de un modo ingenuo y acrítico. Yo creo que G estaría dispuesto a considerar el concepto «bifurcatorio» apropiado para conceptos e intensiones (en tanto que distintos de conjuntos y extensiones).

«En la medida en que los conjuntos aparecen en matemáticas», dice G, «siempre se los puede interpretar sin ninguna dificultad» conforme a este concepto iterativo de conjunto. En la segunda edición G añade una nota (12, en la p. 262) sobre la teoría de las categorías (referente a la autoaplicabilidad de las categorías): «No parece, sin embargo, que se pierda nada del contenido matemático de la teoría si se distinguen categorías de diferentes niveles. Si existiesen pruebas matemáticamente interesantes que no pudiesen llevarse a cabo bajo esta interpretación, entonces las paradojas de la teoría de conjuntos se convertirían en un serio problema para las matemáticas.» El condicional contrafáctico del enunciado de G indica naturalmente que él creía que no hay semejantes pruebas. Una cuestión distinta y más amplia acaso sea el lugar de las consideraciones intensionales en matemáticas. G parece insinuar, por ejemplo, que cuando la teoría de conceptos logre un desarrollo relativamente adecuado, será útil también para las matemáticas.

Según G, el concepto mismo de conjunto sugiere ulteriores iteraciones y nuevos axiomas. En conexión con esto, añade una nota (18, p. 264) que yo no entiendo del todo:

> De modo similar, el concepto «propiedad de conjunto» (el segundo de los términos primitivos de la teoría de conjuntos) sugiere continuas extensiones de los axiomas referentes a él. Además, se pueden introducir conceptos como «propiedad de propiedad de conjunto» etc. Sin embargo, los nuevos axiomas así obtenidos, en lo que se refiere a sus consecuencias para proposiciones referentes a dominios limitados de conjuntos (tales como la hipótesis del continuo) están ya contenidos (en la medida en que hoy son conocidos) en los axiomas sobre conjuntos.

El texto difiere de la primera edición (nota 17, *AMM*, p. 520) en diversos respectos. Pero la principal diferencia es la adición de «(en la medida en que hoy son conocidos)». En la monografía de G de

1940 (*The consistency of the Continuum Hypothesis*, p. 2) él dice que las clases son aquello que en la formulación de Zermelo aparece bautizado con el nombre de «definite Eigenschaften». Esto parece indicar que las propiedades de conjuntos corresponden a las clases de su monografía, de las cuales se sabe, sin embargo, que desempeñan un papel secundario y que no son indispensables. En otras palabras, no existe ninguna diferencia esencial entre el sistema de la monografía de G y la conocida formulación (normalmente conocida como ZF) en la que no aparecen clases. En este sentido, es difícil ver por qué G considera al concepto «propiedad de conjunto» el segundo de los términos primitivos de la «teoría de conjuntos» cuando, por otro lado, de «propiedad de propiedad de conjunto», etc. (así construidos) se sabe que son extensiones no esenciales («conservadoras»). De ahí que la adición de «(en la medida en que hoy son conocidos)» parezca hacer discutible esta interpretación de «propiedad de conjunto».

Otro problema es la relación entre la idea de G de la teoría de conceptos y lo que él llama aquí el concepto «propiedad de conjunto». Una propiedad de conjuntos es, presumiblemente, un concepto relacionado con los conjuntos. Una teoría que se ocupa de los conceptos «propiedad de conjunto», «propiedad de propiedad de conjunto», etc., forma parte presumiblemente de la teoría de conceptos, pero aparentemente sólo puede ser un pequeño fragmento de la misma, puesto que es obvio que no puede copar el concepto universal de concepto y que, según G, una jerarquía análoga a ésta en teoría de conjuntos no puede constituir la parte principal de la teoría de conceptos. En suma, no tengo claro cómo concibe G el concepto «propiedad de conjunto» o qué lugar especial ocupa éste en su marco conceptual.

Otro punto enigmático en esta nota lo constituye la posterior referencia a ella: «los axiomas mencionados en la nota 18» (en la p. 265). En la primera edición (*AMM*, p. 521) la referencia correspondiente es a la nota 14 (que en la segunda edición se mantiene igual, aunque se convierte en la nota 15): Un conjunto de todos los conjuntos u otros conjuntos de similar extensión no puede existir, dado que todo conjunto obtenido de este modo da lugar inmediatamente a ulteriores aplicaciones de «conjunto de» y, por tanto, a la existencia de conjuntos más grandes. Como G habla de «los axiomas mencionados en» esta nota, es probable que esto haya de interpretarse como algo similar a lo que en la literatura se conoce con el

nombre de «principio de reflexión». (Para la formulación que G hace de este principio en 1972, véase *MP*, p. 189), que en la nota 20 de la segunda edición se menciona como uno de los avances (hechos a partir de 1947). Hay tres posibilidades: las dos referencias distintas concuerdan ambas con las intenciones de G, el número 14 de la primera edición debe ser el 17, o el número 18 de la segunda debe ser el 15.

11.2.3. *Nuevos axiomas (y el problema del continuo)*

En una carta que G escribió a Menger en diciembre de 1937, confesaba, «Ahora estoy tratando de probar también la independencia de la hipótesis del continuo». Por lo demás, informando de sus conversaciones con G en la primavera de 1939, Menger alude a la «primitiva convicción de G de que aún no se han descubierto los axiomas correctos o justos de la teoría de conjuntos», y luego añade, «Esta convicción la expresaba cada vez con más énfasis». (Para detalles, véase el cap. 3, años 1937 y 1939.) De donde se deduce que G conjeturó la independencia de la conjetura de Cantor y sintió la necesidad de nuevos axiomas mucho antes de escribir su ensayo sobre Cantor de 1947.

Afirma que, según el concepto iterativo de conjunto, «los conceptos y teoremas de la teoría de conjuntos describen alguna realidad bien determinada, en la que la conjetura de Cantor tiene que ser verdadera o falsa» (pp. 263-264). La indecidibilidad de la conjetura a partir de los axiomas aceptados, a diferencia de lo que ocurre con la prueba de la trascendencia de π, no soluciona, según dice, el problema (p. 263). Es también una situación muy distinta de la que se produce con el quinto postulado de Euclides «tanto desde el punto de vista matemático como epistemológico» (pp. 270-271).

G alude a tres tipos de axiomas además de los axiomas usuales (tales como los de ZF): «los axiomas (fuertes) de infinitud», «los axiomas mencionados en la nota 18» (consúltese la discusión anterior) y «otros (hasta ahora desconocidos) axiomas de la teoría de conjuntos que una comprensión más profunda de los conceptos subyacentes a la lógica y a la matemática nos permitiría reconocer como implicados por tales conceptos (véase, e.g., la nota 23 *[i.e.,* el "axioma máximo" mencionado antes])» (p. 265). La última categoría significa fundamentalmente «todos los demás axiomas acepta-

bles», pero parece indicar también su idea de que la lógica en tanto que teoría de conceptos, cuando se la conozca mejor, permitirá el descubrimiento de nuevos axiomas.

De los axiomas de infinitud, G cita los números innaccesibles y los principios de Mahlo como ejemplos claros «que únicamente explicitan el contenido del concepto de conjunto explicado antes». Los axiomas introducidos entre 1947 y 1962 son mencionados en la segunda edición con la siguiente observación: «Sin embargo, aún no se ha aclarado que estos axiomas estén implicados por el concepto general de conjunto en el sentido en que lo están los de Mahlo» (nota 20). En años recientes, los axiomas nuevos más interesantes en teoría de conjuntos son los «axiomas de determinación», que sugieren e interactúan con nuevos axiomas de infinitud. Por ejemplo, W. Hugh Woodin y otros han formulado nuevos axiomas de infinitud con objeto de probar la «determinación proyectiva» y que el axioma de determinación vale para L (R). Además, estos resultados confieren también ciertos límites superiores a los intentos de generalizar los conjuntos constructibles de G (a «estructuras L-formes») realizados por R. B. Jensen y otros. Así pues, parece que los axiomas de determinación han resultado ser un estimulante más eficaz que el problema del continuo en lo que a la búsqueda de nuevos axiomas de infinitud se refiere (consúltese la sección 6.3).

Hay muy distintos e impredecibles modos de llegar a nuevos axiomas. Cuando se formulan nuevos axiomas, se plantean dos problemas distintos a la consideración de G: cómo determinar que son probablemente verdaderos y si son o no útiles para la solución del problema del continuo. En lo que respecta a la segunda de estas cuestiones, los nuevos axiomas formulados hasta ahora parecen ser irrelevantes. La razón para la creencia de G en su relevancia parece ser también débil. Me sorprende no haber podido hallar casi nada en el ensayo de G aplicable a este problema. El único argumento parece ser un débil símil a su descubrimiento de que sus proposiciones indecidibles, que se pueden expresar en forma de «proposiciones diofánticas», se pueden decidir en sistemas superiores (p. 264). Pero semejantes proposiciones son muy distintas de los conocidos problemas de teoría de números aún irresueltos, al haber sido construidas con el objeto de hacer consideraciones metamatemáticas. En concreto, como el problema del continuo concierne, por así decir, a todos los detalles individuales del continuo, parece poco plausible que los axiomas de infinitud lo solucionen, «salvo acaso en el

caso de alguna afortunada coincidencia». Parece más plausible que pueda solucionarlo un «axioma máximo», pero no tenemos ninguna idea de cómo poder conferir una forma precisa al axioma buscado. En otro lugar G habla de que nuestras intuiciones matemáticas confieran sentido o lleven a decidir problemas como el de Cantor (pp. 271 y 272). Sin embargo, el argumento no parece ser especialmente relevante para el problema del continuo, sino que más bien parece decir tan sólo que nuevos axiomas e intuiciones servirán para decidir más problemas.

G parece dedicar más atención a la otra cuestión de la evaluación de los nuevos axiomas, que no resulta muy relevante para el problema del continuo. La «necesidad intrínseca» de un nuevo axioma se percibe si vemos que nos es impuesto por el concepto iterativo y los axiomas aceptados. Los axiomas de Mahlo constituyen el modelo de esta categoría. G dice más cosas acerca del «argumento a partir del éxito» (en las pp. 265 y 272). G habla de fecundidad en consecuencias «verificables». «Consecuencias demostrables sin el nuevo axioma, pero cuyas pruebas resultan mucho más simples y fáciles de descubrir con ayuda del nuevo axioma, que además hace posible sintetizar diferentes pruebas en una sola.» La teoría analítica de números es el ejemplo que se ofrece. G habla también de «un grado mucho más alto de verificación» que arroja «mucha luz sobre todo el campo», etc. En el suplemento, G vuelve otra vez a su criterio (probable) de verdad señalando, «Pero este criterio, aunque en el futuro pueda resultar decisivo, aún no se puede aplicar a los axiomas específicos de la teoría de conjuntos».

11.2.4. *Existencia objetiva e intuición matemática*

Este tema se considera primordialmente en 6 (más en concreto, de la mitad de la p. 271 a la mitad de la 272). [Hay también algunas consideraciones pertinentes en *MP* pp. 84-85.] En la literatura hay varios intentos tendentes a interpretar este texto de una página prácticamente.

En contraposición a lo que ocurre en geometría, es obvio que los objetos de la teoría de conjuntos transfinitos «no pertenecen al mundo físico y hasta su conexión indirecta con la experiencia física es muy remota (debido fundamentalmente al hecho de que los conceptos de la teoría de conjuntos no desempeñan más que un papel

insignificante en las teorías físicas de hoy)». Esta observación implica la posibilidad de que desempeñen mayor papel en el futuro y yo comparto esta creencia, aparentemente inverosímil, sobre la base empírica de que en la física se han ido empleando regiones cada vez más remotas pero sustantivas de la matemática.

Dado este alejamiento de la experiencia sensorial, G pasa a considerar el conocimiento inmediato, «algo similar a una percepción también de los objetos de la teoría de conjuntos», la intuición matemática y la existencia objetiva de sus objetos. [La identificación implícita «en este tipo de percepción, *i.e.*, en la intuición matemática» me parece que es un error, ya que la primera no es más que una parte de la segunda. El propio G acaso también me haya dicho algo de esto.] En *MP*, G va más allá de las percepciones de objetos matemáticos y habla así mismo de «las percepciones de conceptos», diciendo también que percibir un concepto es verlo o comprenderlo o captar el significado del término que lo representa (p. 85).

Aparte de al empleo de varios conceptos epistemológicos difíciles, la gran complejidad del razonamiento de G se debe también a que sigue a la vez varias líneas de argumentación. Con la ayuda de sus conversaciones conmigo, se puede considerar que el texto incluye implícitamente tres niveles: a) la objetividad en tanto que dada por «el hecho psicológico de la existencia de una intuición que está suficientemente claro que produce» proposiciones matemáticas objetivamente verdaderas, b) los objetos de la intuición matemática, y c) su existencia objetiva. G considera el nivel a el menos discutible y está fundamentalmente de acuerdo con Kant respecto del b (sólo que con una intuición más rica). Es en el nivel c donde arguye a favor de su realismo fuerte, que difiere del dualismo kantiano.

Con respecto a a, G habla de un «criterio de verdad en teoría de conjuntos» que no es otra cosa más que el hecho de que tenemos una intuición de que una proposición es verdadera. Su aceptación se justifica por «el hecho de que se necesitan continuas apelaciones a la intuición matemática» [aquí tenemos la última arma favorita de G] «también para la solución de problemas en teoría finitaria de números (del tipo de la conjetura de Goldbach) donde la significatividad y falta de ambigüedad de los conceptos que entran en ellos difícilmente pueden ser puestos en duda». Dado que nuestra intuición asegura la objetividad en este caso menos controvertido y que en teoría de conjuntos tenemos una experiencia similar de intuición fiable (como se desprende del acuerdo sobre las pruebas, algunas de

ellas enormemente complejas, y sobre muchos de los axiomas), tenemos todas las razones para creer en la objetividad de la verdad o falsedad de las proposiciones, tal como es percibida por nuestra intuición. Según G, «Esto basta para otorgar significado a la cuestión de la verdad o falsedad de proposiciones como la hipótesis del continuo de Cantor». En otras palabras (que proceden de sus conversaciones), no es inútil plantear la cuestión. [Esto, desde luego, nada dice de la perspectiva ni las expectativas de respuesta a la cuestión (en lo que se refiere, por ejemplo, a la conjetura de Cantor).]

Como ya he señalado antes, G dice que una vez que reconocemos que ciertas proposiciones son verdaderas (o sólo significativas), éstas deben referirse a algo y tiene que haber ciertos objetos acerca de los cuales las proposiciones están diciendo tal o cual cosa. De ahí que nos movamos de a) la objetividad a b) los objetos. G compara los objetos matemáticos (en este contexto, fundamentalmente conjuntos, dejando fuera números, formas geométricas, etc.) con los objetos físicos y la «semi-percepción» («algo parecido a una percepción») de conjuntos con la percepción sensorial de aquéllos. Esta analogía lleva a G a establecer un paralelismo que, si se hace explícito, dice, «La semi-percepción [percepción sensorial] nos induce a construir teorías matemáticas [físicas] y a esperar que futuras semi-percepciones [percepciones sensoriales] concuerden con ellas, a creer que una cuestión no decidible en el momento presente tiene significado y podrá ser decidida en el futuro». (En la sección 6.3 he tratado de bosquejar un desarrollo de esta idea.) A este contexto pertenece la nota 40 de G, que compara el concepto de conjunto con las categorías kantianas del entendimiento puro: la idea subyacente a ambos es la «síntesis», es decir, la generación de unidades a partir de multiplicidades (de un conjunto a partir de sus elementos, y, «en Kant, de la idea de *un* objeto a partir de sus diversos aspectos»).

La parte más intrincada del argumento de G es la referente a c) la existencia objetiva de los objetos de nuestra intuición (matemática). [En relación con su razonamiento en favor de a, dice explícitamente que la cuestión c «no es decisiva para el problema que aquí se está discutiendo». Considero que esto sólo significa que el criterio de verdad basado en la objetividad reconocida por intuición no es dependiente de c.] Consideremos primero el caso de la experiencia física; G reconoce «el hecho de que hasta nuestras ideas relativas a objetos físicos contienen componentes cualitativamente distintos

de las sensaciones o meras combinaciones de sensaciones, e.g., la idea de objeto mismo». En este sentido, G está de acuerdo con Kant. Pero, mientras que, según Kant, la idea de objeto mismo es aportada por nuestra mente, G cree otra cosa; cree que *formamos* la idea también «sobre la base de alguna otra cosa que es inmediatamente dada, sólo que esta otra cosa *no es*, o no primariamente, la sensación».

Las razones que G alega para esta conclusión son «el hecho» antes citado y que «mediante nuestro pensamiento no podemos crear elementos cualitativamente nuevos, sino sólo reproducir y combinar los que están ya dados». Como ya he dicho antes, es dudoso que el empleo que G hace de la palabra «crear» en este contexto sea generalmente aceptado. No obstante, estoy totalmente de acuerdo con la conclusión de G y el espíritu de su argumento. Entre otras cosas, la conclusión elimina el Ding an sich kantiano y su transcendencia. Presumiblemente, el elaborado análisis husserliano de nuestra percepción de un objeto físico también puede tomarse como un apoyo a la conclusión de G. Una forma de enfocar esta conclusión es cuestionar la insuperable barrera estipulada por Kant entre realidad objetiva (en el sentido de su Ding an sich) y nuestro conocimiento. Me parece que el argumento de G se puede modificar del siguiente modo. Podemos ser capaces de crear elementos cualitativamente nuevos, pero lo que atribuimos al mundo físico ha de ser derivable de y contrastable con nuestra experiencia física, de tal modo que no haya ninguna barrera insuperable entre el mundo y nuestra experiencia. En concreto, como dice G, *formamos* nuestras ideas de los objetos físicos sobre la base de alguna otra cosa que *es* inmediatamente dada.

G cree que la situación es análoga en el caso de nuestra semipercepción de objetos matemáticos. El se da cuenta del distinto estatuto de lo «dado» (problema normalmente conocido como de la causación): a saber, los datos de este segundo tipo «no se pueden asociar con acciones de ciertas cosas sobre nuestros órganos sensoriales». «De aquí no se sigue, sin embargo», continúa, que «sean algo puramente subjetivo como afirma Kant. Más bien pueden representar también un aspecto de la realidad objetiva, pero, a diferencia de las sensaciones, su presencia en nosotros puede deberse a otro tipo de relación entre nosotros y la realidad». Me siento inclinado a darle la razón a G, mas no sé cómo elaborar sus afirmaciones. Antes me perturbaba la asociación de la existencia objetiva con la idea de te-

ner una «residencia» fija en el espacio-tiempo, pero ahora creo que puede existir (y ser «percibido por semipercepciones») «un aspecto de la realidad objetiva» sin que ocupe un lugar en el espacio-tiempo del modo en que los objetos físicos lo hacen. Tal vez se puedan tomar las consideraciones husserlianas en torno a la Wesenschau en apoyo de la creencia de G en la existencia objetiva de los objetos matemáticos. Pero yo no entiendo el aparente énfasis puesto por Husserl en la subjetividad. (Husserl dijo en cierta ocasión de sí mismo que era un «empirista por los cuatro costados» y más tarde se molestó cuando se le llamó empirista. No tengo claro si Husserl emplea la subjetividad únicamente como instrumento para matizar una postura realista.)

G no distingue entre intuición de re e intuición de dicto. A mí me parece que esta distinción es secundaria en el sentido de que la acepción más interesante y básica de intuición es previa a esta distinción. Si partimos de esta distinción, creo que no podemos recuperar la idea más primitiva combinando ambos tipos. G dice, «Conviene señalar que la intuición matemática no es preciso concebirla como una facultad que proporciona un conocimiento *inmediato* de los objetos concernidos». Creo que esto implica el conocido hecho, aunque, por lo común, deliberadamente pasado por alto (con objeto de desacreditar la apelación a la intuición), de que nuestra intuición incurre en errores, requiere ser cultivada, y puede ser corregida y ampliada. Desde luego, toda la cuestión de los distintos tipos de intuición (como se ilustran en la última sección), los distintos grados de certeza, y la interacción entre intuiciones e idealizaciones es enormemente compleja y constituye, en mi opinión, el tema central no sólo de la filosofía de la matemática, sino también de la filosofía en general.

11.3. **Russell y la lógica matemática**

El ensayo sobre Russell ocupa un lugar especial en la vida y la obra de G. En una carta fechada el 18 de diciembre de 1942, Schilpp invitó a G a escribir un artículo, «La lógica matemática de Russell», para un volumen de homenaje a Russell. «Hablando del tema la noche pasada con Lord Russell», dice la carta, «me enteré de que él le considera a usted el especialista *par excellence* en este campo». G accedió a escribir dicho artículo.

La invitación llegó en un momento en que G estaba frustrado a causa de su tentativa de extender su prueba de independencia del axioma de elección a una prueba así para la hipótesis del continuo. Es difícil saber si G habría continuado, en otro caso, sus esfuerzos. Tal como sucedieron las cosas, a comienzos de 1943, G comenzó al parecer a centrarse en el ensayo sobre Russell y en el estudio de Leibniz, abandonando en lo fundamental su actividad investigadora en el campo de la lógica matemática (durante los veinte años siguientes o más). Es evidente que este ensayo tan general marca el paso de la atención de G de la búsqueda de resultados matemáticos concretos en lógica a investigaciones de naturaleza más claramente filosófica (e histórica). A diferencia de sus publicaciones anteriores, todas ellas de carácter matemático, este ensayo se sirve de la obra russelliana como punto de referencia para reunir sus propias reflexiones sobre la naturaleza y los conceptos fundamentales de la lógica matemática, a la luz del curso histórico entre Leibniz y él y más allá. [Los usuarios de BP2 han de añadir 226 o 227 a BP.]

La obra de Russell se plegaba muy bien al objetivo de G de ofrecer una amplia panorámica. Como G dice en el ensayo, «Russell ha producido un gran número de ideas interesantes acerca del análisis de los conceptos y axiomas que subyacen a la lógica matemática» (BP, p. 212). Por otro lado, los teoremas de incompletud y los conjuntos constructibles del propio G encajan perfectamente como respuestas decisivas a las ideas russellianas y como avances más allá de ellas. Los teoremas de incompletud ponen límites precisos al proyecto russelliano de una lógica universal, y su prueba obvia el principio russelliano del círculo vicioso (BP, p. 222, a la altura de la nota 29). También confirman algunas de las ideas de Russell (mitad de la p. 213). Los conjuntos constructibles suponen un fructífero empleo de la teoría ramificada de tipos ruselliana «considerada desde un punto de vista puramente matemático», dentro del marco realista de G (p. 227). Incluso el concepto iterativo (o extensional) de conjunto casa perfectamente con la idea russelliana de la «teoría de la limitación de tamaño», propuesta en 1906 (BP, p. 216, la parte central y la nota 9). (No es extraño pero sí de lamentar que G no considere en el ensayo los estimulantes aunque más imprecisos *Principles of Mathematics* russellianos, 1903 y 1937.)

El ensayo fue terminado el 28 de septiembre de 1943 y publicado no mucho después: «Russell's mathematical logic», *The Philosophy of Bertrand Russell,* ed. A. Schilpp, 1944, pp. 125-153. Se reimprimió

en BP, 1964, con un prefacio añadido que se amplió en *Bertrand Russell, a Collection of Critical Essays,* ed. D. F. Pears, 1972, pp. 192-226 (también con cambios poco importantes en las notas 7, 17 y 45, así como la supresión de la nota 50). Además, G ha escrito varias notas (en parte taquigráficamente) en algunas de las separatas del ensayo contenidas en el Nachlass (carpeta 04/79), pero no he estudiado detalladamente tales notas.

La nota preliminar añadida de 1972 no ofrece el menor indicio de que G haya cambiado en lo fundamental las ideas expresadas en el ensayo entre 1943 y 1972. Observa «1) que desde la publicación original de este ensayo se han hecho progresos en algunos de los problemas discutidos y que las formulaciones dadas podrían mejorarse en diversos lugares.» Pero no especifica los «diversos lugares». La observación terminológica 2) acerca del uso específico que él hace del término «constructivista» para aludir a la concepción implícita en la «teoría de la inexistencia de clases» russelliana (explicada en la nota 22, BP, p. 219) clarifica la distinción entre nominalismo y constructivismo. El uso corregido sigue la tendencia a usar «constructivista» para significar «intuicionistamente admisible» o «constructivo» en el sentido de la escuela de Hilbert. De forma más específica, el uso aceptado identifica lo constructivo (o constructivista) con lo intuicionistamente admisible y considera los métodos finitarios (de Hilbert) como parte propia de lo constructivo (consúltese la sección 11.1).

En cualquier caso, G distingue estas dos tesis de la asociada con la «teoría de la inexistencia de clases»: «Ambas escuelas basan sus construcciones en una intuición matemática evitar la cual es precisamente el principal objetivo del constructivismo de Russell.» Por otro lado, «Lo que, en opinión del propio Russell, se puede obtener con su constructivismo (que podría llamarse ficcionalismo) es el sistema de órdenes finitos de la jerarquía ramificada sin axioma de infinitud para individuos». G cree que sin presuponer la noción de finitud no puede obtenerse ni siquiera esto (BP, p. 226). Estas consideraciones ayudan a clarificar la relación entre infinitud y nominalismo (tal como fue discutido en la sección 11.1) al emplear la mayor precisión de una versión del nominalismo más explícitamente formulada. Al mismo tiempo, la «predicatividad» es una idea fructífera y relativamente clara, susceptible de diversas ampliaciones, si se la separa del nominalismo o ficcionalismo russelliano, y se la usa en combinación con conceptos, axiomas y métodos (tales

como el axioma de infinitud, órdenes transfinitos, definiciones inductivas e incluso, como hace G, ordinales arbitrarios) cuya aceptabilidad se confirma sobre otras bases (consúltese BP, p. 227).

La referencia a nuevos «avances» de 1 (en la nota preliminar) presumiblemente abarca tanto los de la literatura estándar como los del pensamiento del propio G. El hecho de que G opte por no desarrollar la cuestión parece indicar que no consideró de gran importancia las posibles mejoras. Por ejemplo, antes de 1960 ya era bien sabido que la teoría de los enteros no se puede obtener en la teoría ramificada de Russell (cuestión que G califica en la p. 266 de BP de irresuelta) y que la teoría simple de tipos es fundamentalmente un segmento de la teoría axiomática de conjuntos (aparentemente considerada por G en la p. 231 como más diferente). Es evidente que éstas no son cuestiones sustanciales para los objetivos principales del ensayo de G. Por otro lado, algunas de las observaciones hechas por G en sus conversaciones conmigo tal vez ayuden al lector a lograr una mejor comprensión de este ensayo.

La cuestión central es la tajante distinción establecida por G (con toda claridad en este ensayo) entre la lógica (la teoría de conceptos o intensiones) y la matemática (la teoría de conjuntos o el estudio de extensiones). En concreto, las «clases», que en este ensayo son tomadas como un concepto primitivo, emparejadas con conceptos e identificadas vagamente con conjuntos, son dejadas de lado y tratadas como un término derivado. De ahí que las «clases» deban ser reemplazadas por «conjuntos» que son, cosa que en el ensayo no es nada obvia, radicalmente distintos de los conceptos. En el ensayo sobre Cantor de 1947, G ya había confinado su atención a los conjuntos y dejado fuera consideraciones generales acerca de las nociones de concepto y clase (excepto en la enigmática nota 18 discutida en la última sección). Aparentemente al menos, en 1943, G concebía extensiones e intensiones como formando pareja y asignaba un papel secundario a las intensiones. Por ejemplo, «Puede ocurrir incluso que el axioma de extensionalidad o al menos algo similar a él valga para conceptos» (BP. p. 220). En la década de los setenta propuso que se suprimiera la citada oración porque ya no creía en ella.

Por lo demás, G más tarde estableció una distinción más tajante entre objetos y otras cosas; en concreto, los conceptos (y clases) no son objetos (en contra de su uso en el ensayo de Russell, e.g., pueden «concebirse como objetos reales», «la suposición de tales objetos»,

etc., p. 220). Según esta última concepción, una extensión ha de ser un objeto de suerte que las clases (propias) no pueden ser extensiones. De ahí que, estrictamente hablando, sea inapropiado incluso considerar un «axioma de extensionalidad» general para los conceptos en términos de clases. Por lo que la citada sentencia lo más probable es que implique, en contra de su última creencia, que el dominio de casi todos los conceptos es un conjunto.

Debido a esta tajante distinción establecida por G entre conjuntos y conceptos (y clases), las discusiones del ensayo sobre Russell adolecen de ambigüedad cuando G habla de «clases». Casi todo el tiempo está hablando de conjuntos, pero cuando habla de clases como «pluralidades de cosas» (p. 220), la expresión concuerda con su último uso de la palabra «clase» en la medida en que tales pluralidades sólo constituyen conjuntos si también son unidades. A mí me parece que lo que más se acerca a la intención de G es interpretar el análisis que hace en el ensayo de las «clases» como un análisis de conjuntos (tal y como hoy se los entiende). La principal diferencia entre su postura de 1943 y la posterior reside, a mi juicio, en que en 1943 no veía los conceptos como algo cualitativamente más amplio que los conjuntos. Por consiguiente, tampoco era esencial distinguir entre clases y conjuntos. Así por ejemplo, en los años setenta, conjeturó que todo conjunto es la extensión de algún concepto. Sin embargo, la oración citada en el último párrafo parece sugerir que en 1943 pensaba algo parecido a lo contrario: todo concepto tiene como extensión un conjunto (o es una intensión que determina un conjunto) (y, además, no hay dos conceptos que tengan la misma extensión). (No estoy seguro de si G creía también en 1943, como muchos creían y creen, que hay bastantes más conjuntos que conceptos. El parece indicar esto en la p. 223: «sólo si se supone la existencia de un concepto siempre que uno quiere construir una clase». Pero esto es ambiguo porque se refiere a nociones russellianas.)

G habla lo mismo de «una clase o concepto» (e.g., dos veces en la p. 216 y también en la 228) que de «clases y conceptos» (pp. 220 y 231) y no enfatiza, más allá de las ocasionales referencias a las paradojas en su forma intensional (pp. 216 y 228), su tajante distinción (posterior) entre conjuntos y conceptos. Sí insiste en los conceptos en la p. 229 (y en el contexto de la consideración de la concepción russelliana, en la p. 228). Una dificultad en la presentación de G es la mezcla de usos que hace de los términos «clase» y «concepto», que unas veces los emplea en el sentido de Russell y otras en el suyo pro-

pio. Dentro de la misma línea, la muy aludida comparación entre las matemáticas y la física (de la p. 220) es lo que G llama un argumento «ad hominem», expresado en el lenguaje de su oponente («positivista»). De ahí que hable de «suposición», «legitimar», y «datos», aunque sólo pone entre comillas este último término. (En este contexto —dicho sea de pasada— en 1975 sugirió la idea de sustituir «cuerpos físicos» por «objetos físicos» y «tales objetos» por «tales entidades» o «tales cosas».)

El ensayo sobre Russell es el único de los trabajos publicados de G que ofrece comentarios generales, desgraciadamente, todos ellos demasiado breves, sobre la naturaleza e historia de la lógica, dedicando especial atención al importante papel desempeñado por el análisis conceptual. El análisis se hace desde una posición realista u objetivista, y es natural servirse de la idea que Russell tenía de esta postura para contraponerla a su nominalismo o ficcionalismo. La fecundidad (o «valor efectivo») de la postura filosófica de G, establecida de forma más explícita más tarde en las cartas que me escribió, se ilustra recordándole amablemente al lector sus importantes descubrimientos. En atención a las limitaciones de los intereses de Russell, que no dejaron de ser amplios, la constructividad es dejada fuera y la teoría de conjuntos mantenida en segundo plano, debido a que ni una ni otra fueron nunca temas de interés primordial para Russell. De ahí que para poder lograr una idea global de la filosofía de la matemática de G (que es, para él, un dominio más limitado que la lógica), este ensayo haya de complementarse con sus trabajos sobre Bernays (considerado en la sección 11.1) y su ensayo sobre Cantor (considerado en la sección 11.2).

En lugar de seguir fielmente el orden de presentación del texto de G, me parece que es preferible considerar el ensayo atendiendo a diversos temas. Para ello, propongo seguir el siguiente orden: 1) la naturaleza e historia de la lógica, 2) realismo y nominalismo, 3) predicatividad y principio del círculo vicioso, 4) algunos detalles. Después de un breve esquema de sus ideas sobre 1, G destaca el análisis conceptual como la parte más fundamental y restringe su atención a él. Pero para semejante estudio, la postura filosófica desde la que se realiza el análisis tiene una importancia decisiva. De ahí que 2 incluya no sólo la teoría y práctica russellianas (así como sus teorías primeras y últimas), sino también los análisis sobre la teoría de las descripciones y sobre el concepto de analiticidad. Dada la importancia del principio del círculo vicioso para el trabajo realizado

por Russell en lógica, la amplia discusión que G hace del mismo se considera independientemente en 3, a la luz de 2.

1) Naturaleza e historia de la lógica (pp. 231-232)

En un sentido amplio y un tanto vago, la lógica se puede considerar como la teoría y la práctica de hallar orden en el mundo o de poner los hechos en orden. Es en este sentido en el que la lógica puede incluir la «lógica dialéctica» y, en particular, la *Lógica* de Hegel. Es más frecuente, sin embargo, identificar la lógica con la lógica formal, que estudia el aspecto «formal» del mundo o de nuestro pensamiento. Limitaré mi atención a la lógica en este sentido estricto. Según G, «la lógica matemática no es más que una formulación precisa y completa de la lógica formal» (p. 211). Como la lógica (tal como la conocemos) se desarrolla (como G y yo pensamos) en el tiempo, la lógica matemática tiende a ir a la zaga de la lógica por cuanto que, generalmente, concebimos y tenemos ideas lógicas que no han recibido «una formulación completa y precisa». De ahí que la importancia del análisis conceptual estribe en parte en su ayuda en el logro de semejante formulación.

Así por ejemplo, G habla de la lógica como la teoría de conceptos y expresa sus dudas respecto a si se la puede matematizar del todo, aunque alguno de sus enunciados indican que siempre es posible una formulación satisfactoria. En cualquier caso, es indudable que aún no tenemos una teoría desarrollada de conceptos. Hasta donde mi conocimiento alcanza, G no ha ofrecido nunca sin ambigüedad una lista completa de lo que él considera los conceptos primitivos de la lógica. Menciona, por ejemplo, «nuestras intuiciones lógicas (*i.e.,* intuiciones acerca de nociones tales como verdad, concepto, ente, clase, etc.)» (p. 215). De lo que dije antes se desprende que «clase» debiera borrarse o sustituirse por «conjunto». Aunque pasemos por alto la incompletud de la lista, queda pendiente la cuestión de cómo van a funcionar en lógica, entendida como la teoría de conceptos, las «nociones» explícitamente reseñadas. Todo ente es para G o bien un concepto o bien un objeto y un conjunto es un objeto matemático. De ahí que si contamos con las nociones de objeto y concepto, se pueda prescindir del concepto de ente (o considerarlo como el dominio de las variables generales). También se puede, por conveniencia, dejar fuera (provisionalmente) aquellos

objetos que no son conjuntos, como se hace en la teoría pura de conjuntos (véase más abajo). El concepto de verdad podría tal vez funcionar como parte de la metateoría, aunque no estoy seguro de las ideas de G sobre esta cuestión.

Así pues, la teoría de conceptos incluye tres conceptos primitivos: concepto, objeto y conjunto. Al desarrollar la teoría podemos pasar por alto el concepto de objeto y esperar que la estructura de la misma no se vea muy afectada si luego añadimos objetos (distintos de los conjuntos puros). Por otro lado, como ya he dicho antes, G conjetura que todo conjunto es la extensión de algún concepto. De ahí que parezca posible obtener el concepto de conjunto y los axiomas acerca de conjuntos en una teoría desarrollada de conceptos, considerando las extensiones de conceptos con dominio «pequeño». En la práctica, sin embargo, si queremos desarrollar ahora una teoría de conceptos, es preferible suponer la conjetura de G e inspirarse en la teoría de conjuntos, de la que tenemos una experiencia mucho más rica.

Con objeto de transmitir lo que yo creo que es la idea de G, tal vez resulte útil esbozar un sistema, tosco e inadecuado, de la teoría de conceptos como ilustración del tipo de cosas que cabría hacer con él. Ha habido intentos de construir sistemas de teoría de conjuntos ideados por gente que adoptaba un punto de vista intensional e ignoraba o no deseaba aceptar el consenso de fundamentar tales sistemas en el concepto iterativo de conjunto. Cabe revivir semejantes intentos en el contexto de una teoría de conceptos. G menciona las ideas de Church y Quine (pp. 229 y 217). Como estoy más familiarizado con la idea quineana de «estratificación», me serviré de ella como ejemplo.

Sea C el simbolismo de primer orden obtenido a partir de ZF sustituyendo la relación de pertenencia por la relación *A* de aplicación («xAy» para «*x* se aplica a *y*») y construyendo las variables teniendo como dominio conceptos. Los siguientes axiomas y definiciones reemplazan a los axiomas de ZF (también podemos partir de un sistema que incluya más axiomas que ZF).

1. Si una fórmula *Fx* está «estratificada», hay un (concepto) *y* tal que, para todo *x*, *yAx* sii *Fx*.

2. *Sy* (*y* es un conjunto) se define diciendo que *y* es extensional y bien fundado. En otras palabras, si para todo *x*, *yAx*, sii *zAx*, entonces *y* = *z*, y si *y* se aplica a algo, entonces hay algún *u* tal que *yAu* pero, para todo *z*, si *yAz*, entonces no hay ningún *w*, para el que tanto *zAw* como *uAw*.

3. *xBy* (*x* pertenece a *y*) sii *Sx* y *Sy* y *yAx*.
4. Todos los axiomas de ZF, con todos los cuantificadores restringidos a conjuntos; *i.e.*, aparecen únicamente en contextos como: para todo *x*, si *Sx*, entonces *Fx*; o existe un *x* tal que *Sx* y *Fx*. En el axioma de sustitución, no se necesitan restricciones sobre los cuantificadores de la relación funcional dada, de suerte que nos podemos beneficiar del contenido de C, más rico (que el de ZF). En otras palabras, dada una relación arbitraria de muchos a uno, *Ruv* (expresable en C) con el conjunto *x* como dominio, su campo forma también un conjunto *y*.

La formulación de C es probable que sea mejorable y tal vez contenga incluso errores serios. Pero creo que ofrece una ilustración concreta de lo que a mí me parece que es la idea que G tiene de una teoría de conceptos. Cosa más seria es tomar en consideración la sugerencia hecha por G de emplear la idea russelliana de «dominio limitado de significación» (pp. 228-229), que no aparece en C y requiere consideraciones adicionales. Un modo de habérnoslas con «significativamente aplicable» (y su complemento) reside en emplear un «cálculo de predicados parcial», como el sugerido por mí en *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, vol. 7 (1961), pp. 283-288. Pero en este caso, acaso otras ideas (como, por ejemplo, las de Church) resulten más adecuadas que la «estratificación».

La «lógica matemática», según G, «tiene dos aspectos distintos. De un lado, es una sección de la matemática, que se ocupa de clases [conjuntos], relaciones, combinaciones de símbolos, etc. y no de números, funciones, figuras geométricas, etc. De otro, es una ciencia previa a todas las demás, que contiene las ideas y principios que subyacen a todas las ciencias. Es en el segundo sentido en el que Leibniz concibió por primera vez la lógica matemática en su *Characteristica universalis*, de la que habría constituido una parte central» (p. 211).

Aunque la mayor parte de la investigación que hoy se realiza en lógica matemática está dedicada al primero de estos dos aspectos, G está fundamentalmente interesado en el segundo, especialmente en el ensayo que estamos considerando. Por otro lado, el ensayo pasa enseguida de Leibniz a Russell, a través de Frege y Peano, y luego deja de lado casi todas las consideraciones de detalle «acerca tanto del formalismo como del contenido matemático de» *PM* para centrarse en «la obra de Russell acerca del análisis de los conceptos y axiomas que subyacen a la lógica matemática» (pp. 211-212) (lo

cual sería, desde luego, un título más adecuado del ensayo). La selección del material refleja sin lugar a dudas la idea que G tiene de lo que constituye el centro mismo de la lógica matemática tal como él la ve.

G vuelve de nuevo a esta tarea del análisis y a Leibniz al final del ensayo, después de concluir la parte principal del mismo con una negación y una invitación: «Hay muchos síntomas que muestran, sin embargo, muy claramente que los conceptos primitivos [de la lógica] está necesitados de más elucidación.» Esta se considera que es la razón por la que la lógica matemática no ha sido capaz hasta ahora de «facilitar la matemática teórica... como el sistema decimal de números ha facilitado las computaciones númericas»: «Pues ¿cómo se puede esperar poder resolver sistemáticamente problemas matemáticos por el mero análisis de conceptos, si nuestro análisis no es suficiente hasta ahora ni siquiera para establecer los axiomas?» Me parece que G está insinuando aquí que, una vez que lleguemos a los axiomas adecuados, también podremos aprender a captar los conceptos derivados y a enfocar los problemas matemáticos de un modo sistemático. Pero no he logrado ver las razones que tiene para esta creencia. Por ejemplo, el sistema incompleto estándar de la teoría de números es relativamente adecuado, hasta donde alcanza nuestro conocimiento, para la solución de la mayoría de los problemas de esta área, pero no parece ofrecer pistas para un método sistemático de resolución de problemas. ¿Piensa acaso que esto se debe a que los conceptos no son auto-contenidos a causa de no ser lo suficientemente fundamentales (como revela la incompletabilidad)?

La referencia a Leibniz parece estar relacionada con la creencia de G de que muchas de las ideas y escritos leibnizianos se han perdido (consúltese el informe del capítulo 3, epígrafe 1939). La idea guarda una similitud con la historia de la prueba no escrita de Fermat de su última conjetura, de la que la mayoría de la gente opinaría ahora que Fermat no dio una prueba correcta. No deja de ser tentador especular acerca de la idea que tiene G de lo que Leibniz tomaba como la *characteristica universal,* de la que, según G, la lógica matemática (en el segundo sentido) constituye una parte central. No es fácil ver cómo se podría extender la lógica matemática, tal como se practica hoy, hasta producir poderosos métodos de (o guías efectivas para) nuevos descubrimientos. (En la sección 6.2. he ofrecido alguna sugerencia acerca de la naturaleza de estas anheladas ex-

tensiones en relación con una discusión mantenida entre G y Carnap.)

La breve reseña que G hace de la historia de la lógica desde Leibniz hasta *PM* (que es un periodo de unos doscientos años) destaca por su sucinta caracterización de las contribuciones de Frege y Peano, así como por su capacidad para captar no sólo los principales predecesores de *PM,* sino también su contenido, mencionando los aspectos relevantes de la obra de Frege, Peano, Peirce y Schröder, y Cantor. Las discusiones de la primera parte del texto pueden tomarse como incluyendo también, de forma implícita, una historia de los principales avances de la lógica matemática (en el segundo sentido) desde 1910 a 1940. Me parece que ésta es la razón que explica el que en la década de los setenta G hable del ensayo como una historia de la lógica matemática que toma el trabajo de Russell como punto de referencia. El parágrafo sobre el simbolismo de *PM* señala la falta de una formulación precisa de su sintaxis y, en concreto, brinda un ejemplo de algunas definiciones insatisfactorias de *PM* que llevan a distintos resultados eliminando símbolos definidos de distintos órdenes.

2) Realismo y nominalismo

Según G, Russell no sólo pasó del realismo al nominalismo, sino que también manifestó en la práctica una tendencia a convertir las cosas en «ficciones lógicas» (probablemente como consecuencia de la fascinación que sobre Russell ejercía lo que él llama la «navaja de Occam» y lo que normalmente se conoce con el nombre de «reduccionismo»), aun cuando en teoría estuviera defendiendo una postura realista. En cierta ocasión G escribió que por aquella época (1920 o antes) había topado hasta con el «no» en este mundo, pero que después, por influencia de Wittgenstein, optó por pasarlo por alto (para el contexto, véase el cap. 4, epígrafe 1944). Es bien sabido que en los últimos años, probablemente a partir de 1920, Russell ya no era un realista matemático ni siquiera en teoría. Pero su primera postura era algo más compleja (véase *BA,* pp. 67-69). G hace observaciones sobre «la actitud manifiestamente realista de Russell», mencionando, con aprobación, dos de las manifestaciones de Russell de esta actitud (de 1919 y 1906) y deplora el que la práctica de Russell no siguiera su teoría (pp. 212-213).

Como antes he señalado, la principal contraposición que se establece en el ensayo de G es la que media entre las posturas del realismo y el nominalismo o ficcionalismo (erróneamente denominado en el texto «constructivismo»), en la que se pasa por alto la compleja postura intermedia del constructivismo). En términos de esta contraposición, se pueden distinguir con toda claridad las distintas concepciones correspondientes de conceptos y definiciones, y G hace explícita la distinción en este ensayo.

Dos concepciones de noción. En la p. 220 G habla de dos concepciones de «noción» (término que aparentemente G no vuelve a emplear a partir de este momento). G emplea «concepto» en relación con la concepción realista: «En lo que sigue, emplearé el término "concepto" en este sentido objetivo.» De acuerdo con la concepción nominalista, una noción es «un símbolo junto con una regla para traducir oraciones que lo contienen a oraciones que no lo contienen, de suerte que el objeto independiente denotado por el símbolo parezca una mera ficción». (En la nota 23 G señala que esta concepción de noción no incurre necesariamente en una regresión al infinito cuando se la mantiene «para todas las nociones salvo para los términos primitivos, que no pueden ser sino sólo unos pocos».) Cualquier par de definiciones «se puede suponer que definen dos nociones» en el sentido nominalista. «En cuanto a los conceptos, éste no es el caso, ya que la misma cosa se puede describir de diferentes modos.»

Esta distinción es relevante para las ideas mantenidas por G sobre la analiticidad, las paradojas y la teoría russelliana de las descripciones. De las dos acepciones de analiticidad (p. 230), la primera emplea la concepción nominalista de noción (que acompaña al convencionalismo en su sentido más claro y conocido), y la segunda emplea «el significado de los conceptos» que aparecen en una proposición (véase *BA,* pp. 13-16).

De las paradojas lógicas G dice en la p. 222 que el principio del círculo vicioso no las resuelve y luego continúa, «Desde luego, todo esto se refiere únicamente a los conceptos. Por lo que respecta a las nociones en el sentido constructivista (*i.e.,* nominalista) no cabe duda de que las paradojas se deben a un círculo vicioso». Creo que esto se refiere implícitamente a la distinción establecida por G entre paradojas semánticas e intensionales. G considera el lenguaje y las paradojas semánticas como una cuestión nominalista, de forma

que se resuelven, como familiarmente se hace, apelando al principio del círculo vicioso.

G discute ampliamente el tratamiento russelliano del artículo definido «el», contraponiéndolo a la tesis fregeana de que todas las oraciones verdaderas tienen la misma Bedeutung (pp. 213-215). La discusión concluye con una distinción entre dos concepciones de definición (análogas a las de noción): «Un análisis más detallado muestra, sin embargo, que esta ventaja de la teoría de Russell sobre la de Frege subsiste sólo en la medida en que se interpreten las definiciones como meras abreviaturas tipográficas y no como si introdujeran nombres para los objetos descritos por las definiciones, rasgo éste que es común a Frege y a Russell.»

El realismo del (primer) Russell y de G. El pasaje que comienza al final de la p. 212 corre parejas con la analogía establecida por G en la p. 220 entre las matemáticas y la física. G arranca con una cita de la *Introducción to Mathematical Philosophy* de Russell *(IMP),* que probablemente fue el primer libro de filosofía de la matemática que leyó (en el seminario de Schlick del otoño de 1925, en que G era un «sophomore» [estudiante de segundo año]). G cita de la p. 169 (de *IMP)* la segunda mitad de la oración siguiente: «Mi tesis es que la lógica no puede admitir unicornios, como tampoco lo hace la zoología; pues la lógica se ocupa del mundo real lo mismo que la zoología, sólo que de sus rasgos más generales y abstractos.» No es extraño que a G le guste esta (media) oración, ya que expresa muy bien su propia postura realista. (Hay dos detalles enigmáticos en la referencia de G a *IMP.* Toma como base la edición de 1920 y dice en la nota 3 que la oración citada «fue dejada fuera en las ediciones posteriores». El libro fue escrito en 1918, momento en que Russell estaba en prisión y se publicó en 1919. Que yo sepa, nunca ha sido revisado en ediciones posteriores. En 1955 usé para dar un curso en Harvard, la «octava impresión» de 1953, en la que la citada oración sigue apareciendo, y de acuerdo con la cual, la segunda impresión data de 1922.)

La otra referencia, que es una paráfrasis, sorprendentemente (dada la famosa meticulosidad de G) no indica la fuente más que mediante la expresión «(en uno de sus primeros escritos)». Creo que el escrito en cuestión es un artículo, publicado (en francés) en 1906 (de hecho, el único citado por G en al nota 31), cuya primera versión inglesa es de 1973 *(Essays in Analysis,* ed. D. Lackey, ensayo 9,

pp. 190-214). Citaré entero el parágrafo de elocuente prosa russeliana (de la p. 194), ya que el pasaje relevante me parece que casa perfectamente con un aspecto del pensamiento de G que me gusta y que no ha sido suficientemente divulgado ni valorado:

El método de la logística es fundamentalmente el mismo que el de cualquier otra ciencia. Adolece de la misma falibilidad, la misma incertidumbre, la misma mezcla de inducción y deducción y la misma necesidad de recurrir, para confirmar los principios, al difuso acuerdo entre los resultados calculados y la observación. El objetivo no es eliminar la «intuición», sino comprobar y sistematizar su empleo, eliminar los errores a que su uso ingobernado da lugar, y descubrir leyes generales de las que poder obtener, por deducción, resultados nunca contradichos, y en circunstancias cruciales confirmados, por la intuición. En todas estas cosas, la logística está a nivel con la astronomía (pongamos por caso), sólo que en astronomía la verificación se efectúa, no por medio de la intuición, sino de los sentidos. Las «proposiciones primitivas» de las que parten las deducciones de la logística, han de ser evidentes para la intuición, si fuera posible; mas esto no es indispensable ni es, en ningún caso, la verdadera razón para aceptarlas. Esta razón es inductiva, pues es la de que, entre sus consecuencias conocidas (incluidas ellas mismas) muchas le parecen a la intuición verdaderas, ninguna falsa, y aquellas que parecen verdaderas no son, hasta donde puede verse, deducibles de un sistema de proposiciones indemostrables inconsistente con el sistema en cuestión.

La (larga) oración en que G resume este párrafo dice que Russell compara los axiomas de la lógica y las matemáticas con las leyes de la naturaleza y la evidencia lógica con la percepción sensorial, de suerte que los axiomas no es preciso que sean necesariamente evidentes en sí mismos, sino que su justificación reside (igual que ocurre en la física) en el hecho de que hacen posible que esas «percepciones sensoriales» sean deducidas, cosa que naturalmente no excluye el que puedan tener también un tipo de plausibilidad intrínseca similar a la que se da en física. Si comparamos el resumen de la tesis de Russell con la analogía establecida por el propio G entre las matemáticas y la física (las dos oraciones que van de la línea 10 a la 16 de la p. 220), la similaridad nos llamará la atención. Lo que G hace en su extensión es pasar del reconocimiento de la objetividad (tanto por Russell como por él mismo) al de los objetos (o más bien cosas, incluidos conjuntos y conceptos). (Ya he considerado en otros lugares de este libro la distinción entre objetividad y objetos.) G tam-

bién responde explícitamente a la cuestión, planteada con frecuencia a propósito de su formulación, ¿Qué desempeña en matemáticas el papel de «data»? La respuesta es la «aritmética, *i.e.*, el dominio del tipo de evidencia indispensable elemental que resulta más comparable con la percepción sensorial» (p. 213).

G muestra su acuerdo con (su resumen) de la tesis russelliana observando que él cree que (siempre que «evidencia» se entienda en un sentido suficientemente estricto) esta tesis se ha visto ampliamente justificada por los desarrollos subsiguientes, y es de esperar que lo sea más todavía en el futuro. Alude a su teorema de incompletud (sin mencionar su autoría) como la (principal) evidencia actual y tiene puestas sus esperanzas en la búsqueda de nuevos axiomas (especialmente en «teoría abstracta de conjuntos») como medio para lograr evidencia futura. Creo que su idea aquí es que su teorema nos hace ver la necesidad de «supuestos que transciendan la aritmética» incluso para resolver problemas de la propia aritmética, igual que empleamos leyes físicas que transcienden la percepción sensorial. G reconoce luego que, en tales circunstancias, las matemáticas pueden perder una buena dosis de su «certeza absoluta», pero esto ya ha sucedido en buena medida bajo la influencia de la moderna crítica de los fundamentos. La primera mitad de la afirmación probablemente se refiere al hecho de que no siempre vemos claramente si un «nuevo» axioma es o no verdadero. No estoy seguro de que la segunda se refiera de nuevo a cómo su teorema de incompletud frustró las esperanzas hilbertianas de afianzar las matemáticas mediante pruebas de consistencia «absolutamente ciertas».

Mientras que G extiende el objetivismo russelliano (o realismo respecto de la objetividad) a su propio realismo matemático, Russell matiza o se retira de su objetivismo con su preocupación por la reducción y la economía (probablemente condicionada en parte por la tradición del empirismo británico). El ensayo de G no dice gran cosa del desarrollo histórico de las tesis de Russell, del que hoy disponemos de más datos (véase *BA*, pp. 236-237, 224 y 242). Descrito en breves líneas, el descubrimiento de la teoría de las descripciones en 1905 fomentó su inclinación a una «teoría de la inexistencia de clases», la cual, además, evita la necesidad de establecer restricciones que a él le parecían difíciles de delimitar sin arbitrariedad (véase el artículo analizado por G en las pp. 216-217 y citado en la nota 9; fue escrito en 1905 y publicado el 7 de marzo de 1906). El principio del círculo vicioso surgió del intercambio entre Russell y

Poincaré, y me parece que fue considerado por Russell como una guía para la ejecución de su proyecto de una teoría de la inexistencia de clases. G aborda primero el principio del círculo vicioso porque Russell lo formuló como un principio general sin mencionar para nada su dependencia de la teoría de la inexistencia de clases (p. 217).

G no discute que el principio se justifique desde una postura nominalista, que también subyace a la teoría de la inexistencia de clases. Sin embargo, dado que la matemática no puede desarrollarse desde una teoría de la inexistencia de clases, es necesario trascenderla (también en *PM*), y el estatuto del principio del círculo vicioso se convierte en algo enormemente complejo cuando se lo considera desde la perspectiva realista o incluso desde cualquier otra nonominalista. Esta es la razón por la que la larga discusión que G hace del principio resulta tan enrevesada. G cree, me parece que con toda razón, que la teoría de la inexistencia de clases junto con la postura nominalista que subyace a ella no pueden emplear coherentemente ni siquiera todos los órdenes finitos porque éstos presuponen «la aritmética (o algo equivalente)» (p. 224) o «la noción de finitud» (p. 226). El interés principal de esta idea russelliana reside en que sugiere la jerarquía ramificada y la noción afín de predicatividad, que son muy útiles desde perspectivas distintas de la nominalista.

3) La predicatividad y el principio del círculo vicioso

El principio del círculo vicioso sugiere la idea de «la teoría de los órdenes», de acuerdo con la cual las definiciones han de ser «predicativas», debido a que proposiciones y definiciones tienen un orden más elevado cuando contienen cuantificadores de un determinado orden. De este modo logra evitarse el círculo vicioso. La potencia de la teoría se incrementa a medida que empleamos órdenes más elevados, pero ¿cómo llegar a esos órdenes que tienen como índice números ordinales? Como acabo de decir, desde una postura puramente nominalista, no podemos ni siquiera justificar, por ejemplo, el uso de todos los órdenes finitos.

«La teoría de los órdenes resulta ser más fructífera si se la considera desde un punto de vista puramente matemático» (p. 227). G menciona su sorprendente descubrimiento de los conjuntos cons-

tructibles (empleando ordinales arbitrarios como órdenes) y sus aplicaciones (sin aludir a su autoría del trabajo), y alude a su derrumbamiento de todos los conjuntos de enteros hasta más abajo del primer número ordinal no-denumerable (en tanto que de «orden» de esta muy ampliada «teoría de los órdenes») como el «teorema transfinito de reducibilidad» (comparándolo implícitamente con el «axioma de reducibilidad» de Russell). G observa además en relación con la extensión de los órdenes, «Creo que, incluso si uno rechaza las definiciones impredicativas, no habría ninguna objeción a extenderla a aquellos ordinales transfinitos que puedan construirse dentro de un marco general de órdenes finitos».

En 1953 reparé en que si se añade un orden infinito al sistema de la segunda edición de *PM,* entonces se pueden superar las tres dificultades especificadas (planteadas por la identidad, la inducción matemática y la cortadura de Dedekind) sin violar el espíritu del sistema. Por otro lado, sugerí la idea de una extensión iterada de la teoría de los órdenes empleando todos los ordinales disponibles en cada teoría dada como (nuevos) órdenes (proceso más tarde conocido en la literatura con el nombre de «progresión autónoma»; véase mi *Survey,* p. 579, y el artículo aparecido en *JSL,* vol. 19, 1954, pp. 241-266). Ahora me doy cuenta de que esta propuesta puede considerarse como una generalización de la observación de G. Resulta que para la «teoría de órdenes» concreta que yo consideré, la extensión se interrumpe enseguida a causa de un resultado de C. Spector (*JSL,* vol. 20, 1955, pp. 151-163), según el cual todo ordinal definible en una teoría de órdenes que lleve por índice un ordinal recursivo es a su vez un ordinal recursivo (consúltese *MP,* pp. 127-128). [En el verano de 1957, Spector, G. Kreisel y yo discutimos la cuestión (en Ithaca) y mantuvimos tres posturas distintas. Kreisel quería limitar los órdenes a las buenas ordenaciones demostrables (que se detienen debajo del primer número ordinal no-recursivo), Spector quería detenerse en este ordinal, y yo quería ir más allá echando mano de recursos tales como las definiciones inductivas, que a mí me parece que son inobjetables incluso para aquellos que se oponen al empleo irrectricto de definiciones impredicativas. (En conexión con este punto ya antes me había perturbado el recurso intuitivo de definiciones inductivas, y había considerado algunos ejemplos simples en un contexto más restringido en *JSL,* vol. 18, 1953, pp. 49-59.)

El principio del círculo vicioso es el núcleo de lo que G consi-

dera «las más importantes investigaciones russellianas en el campo del análisis de los conceptos de la lógica formal, a saber, aquellas que conciernen a las paradojas lógicas y su solución» (p. 215). «El principio», dice Russell, «se puede establecer del modo siguiente»: «Nada de lo que implique el *todo* de una colección puede ser un miembro de la misma», o, conversamente: «Si, supuesta una colección que tuviera una totalidad, contuviera miembros definibles únicamente en términos de dicha totalidad, entonces la susodicha colección no tendría ninguna totalidad» *(PM,* I, 37). Russell habla también de «involucrar o presuponer» una totalidad (e.g., p. 39). Es evidente que Russell considera los términos «definible en términos de», «involucrar» y «presuponer» como equivalentes en el contexto, pero G ve aquí tres principios diferentes, el primero de los cuales es menos plausible que los otros dos. Además, G observa que a éstos habría que añadir un cuarto, con objeto de prevenir las paradojas intensionales (BP, pp. 217-218).

No es fácil seguir la pista a la discusión que G hace de las tres formas. La primera forma (llamémosla la forma fuerte) es, en palabras de G, «Ninguna totalidad puede contener miembros *definibles únicamente en términos de* dicha totalidad». Según G, «sólo esta forma hace imposibles las definiciones impredicativas y destruye la derivación de las matemáticas a partir de la lógica, efectuada por Dedekind y Frege, y unos cuantos matemáticos modernos». G considera esto como una prueba de que el principio (y no la matemática clásica) es falso. El principio es aplicable *sólo si* uno adopta el punto de vista nominalista. Pero si conjuntos y conceptos existen objetivamente, no hay nada que objetar a la descripción de algunos de ellos por referencia a todos. Por lo demás, G se refiere a su oración (de su prueba de incompletabilidad) acerca de su propia demostrabilidad formal como una aproximación a la auto-reflexividad de los principios impredicativos «dentro del dominio de la lógica constructivista», y ofrece un ejemplo del lenguaje ordinario: «Toda oración (de un lenguaje dado) contiene al menos un término relacional.» Yo creo que con esto está indicando que la autorreferencia es a veces admisible incluso fuera de la perspectiva realista. (Este párrafo resume la discusión que hace G en las pp. 218-221 de la primera de las formas del principio del círculo vicioso.)

En cuanto a las otras dos formas (que podríamos llamar débiles), G considera hasta qué punto contradicen la postura realista. G arguye, en primer lugar, que las definiciones impredicativas no vio-

lan la forma débil del principio: Si «todo» significa una conjunción infinita, una descripción impredicativa (*i.e.*, caracterización única) de una cosa no contradice la segunda forma, porque no involucra la «totalidad»; ni tampoco la tercera, si por «presupone» se entiende «presupone la existencia» y no «presupone la cognoscibilidad» (p. 219). (En contra de la contraposición establecida aquí —dicho sea de pasada— un conjunto presupone la «existencia», no la «cognoscibilidad», de sus miembros.) En segundo lugar, por lo que a los conjuntos se refiere, cabe suponer, dice G, que la segunda forma es aplicable (o que no es contradicha) y obtener la teoría axiomática de conjuntos; G también insinúa la posibilidad de que pueda no aplicarse, pero me parece que a partir de entonces ha renunciado a esta idea (p. 222). En otras palabras, la teoría de conjuntos conforme al concepto iterativo no viola la segunda forma; por lo demás, si por «presupone» se entiende «presupone la existencia», yo creo que tampoco viola la tercera forma.

4) Algunos detalles

En lo que sigue propongo una lista de algunas cuestiones menores y suplementarias a propósito del ensayo sobre Russell, que incluye unos cuantos de los cambios sugeridos por G, algunos de los cuales se han mencionado antes.

1. El cambio del término «constructivista» tal como se ha explicado antes.
2. La sustitución de «clase» por «conjunto», la contraposición de conceptos con objetos (incluidos conjuntos), y la necesidad de un término que incluya ambos (ente, cosa o entidad).
3. La sustitución de «cuerpos físicos» por «objetos físicos» en la p. 220.
4. Sustituir «primariamente dado» (p. 216, línea 7) por «logrado en un principio partiendo de los términos primitivos del lenguaje».
5. Me hubiera gustado citar y discutir las notas 5 (p. 214) y 10 (p. 216).
6. El término «segundo» (línea 7, p. 217) ¿no debe ser acaso «primero»?
7. Insertar «(en el primer sentido)» entre «falso» y «que» en la línea 12 de la p. 219.
8. Suprimir la nota 24 y la oración del texto a que está vinculada (p. 220).

9. G señala, en relación con la última oración completa de la p. 221, que, mientras que un concepto puede contenerse a sí mismo como componente, esto no es necesario para la justificación de definiciones impredicativas intensionales.

10. Suprimir las dos oraciones que acaban con la primera oración completa de la p. 221. (G manifestó que la referencia a estructuras había estado conectada con alguna idea suya que ya no le parecía relevante.)

11. Dudo si «recursivo» es la palabra adecuada en la línea 12 de la p. 227.

12. La nota 23 (p. 223) alude a la construcción de predicados y relaciones como, por ejemplo, «rojo» y «más frío» mediante ciertas relaciones de similaridad abordada en el apéndice C de la segunda edición de *PM*. Hay una referencia afín (p. 220) a la admisión por parte de Russell de «universales» [fundamentalmente, que yo recuerde, la relación de similaridad] en *An Inquiry into Meaning and Truth,* 1940.

13. La nota 47 parece relevante para la cuestión relacionada con los conceptos primitivos de la lógica y la relación entre el principio de contradicción y las verdades de razón según Leibniz. (El término «clase» debe ser reemplazado por el de «conjunto».)

14. Las consideraciones de la p. 225 son relevantes para la discusión que se hace en la p. 99 de *BA*.

15. Después de escrita esta sección, volví a leer la reseña que Bernays hace del ensayo de G en *JSL,* vol. 11, 1946, pp. 75-79. La reseña contiene un útil resumen del ensayo, así como algunas interesantes ideas del autor. Me parece que esta reseña y esta sección se complementan en algunos aspectos. Creo que, en algunos casos, Bernays ha sido capaz de formular mejor ideas que yo también he tratado de presentar en este ensayo. 1) G señala en el ensayo, dice Bernays, «que las conocidas dificultades de *PM* se deben precisamente a la renuncia de Russell a un realismo más decidido en lo que respecta a los objetos lógicos y matemáticos». 2) Russell en *PM* no separa los requisitos generales para la solución de las paradojas de los de un punto de vista «constructivista». 3) Separando el sistema de (la primera edición de) *PM* del propósito original de la teoría de la inexistencia de clases, se llega a la teoría simple de tipos, a partir de la cual, eliminando algunas restricciones artificiales, se logra la teoría axiomática de conjuntos, que no se basa, sin embargo, en el principio del círculo vicioso, sino en lo que Russell llama «la limitación de tamaño». Creo que estas explicaciones de algunos de los aspectos del ensayo de G facilitan la tarea de seguir la presentación que el propio G hace de su línea de pensamiento sobre estos aspectos.

INDICE ANALITICO

A priori
  categorías, 211
  intuición física, 216
  sintético, 309
Abreviaturas tipográficas,127
Abstracciones, 351
Acción, 111s, 114s, 340
Akermann, W., 94, 187, 374
Adición y multiplicación, 145, 240, 248, 372, 377
Aire de familia, 102, 262
Alexander, J., 151
Álgebra, 241
Algoritmo, 99, 235ss, 355, 358, 377
Allison, H.E. 309
Análisis 357, 374
  clásico, 260, 370, 390s
  consistencia de, 85, 98, 231
Analiticidad, 414, 421
Anschauung, 201
Anschluss, 157
Antinomia, 95, 309s, 401
Antropomorfismo, 110
Apariencias, 309
Apercepción, 347
Apolo, 227
Argumento formal», Leibniz y,
Aristóteles, 347
  categorías, 341
  G y, 71
  G sobre, 223
  medio excelente, 332
  Leibniz y, 355
  silogismo, 358
Aritmética, 945, 989, 136s, 240ss, 245, 249, 340
  clásica, 146, 184
  consistencia de, 89, 250
  de primer orden, 373
  intuicionista, 147, 180,
  Peano, 86, 112, 142, 245
  y percepción sensorial, 96, 243
  recursiva primitiva, 248
  supuestos transcendentes, 423
Arquímedes, 33
Arte, 219ss, 222
Antir, F., 89, 187
Atómica, teoría, 261, 395
Auden, W.H., 344
Axiomas, 88, 47s, 213, 218
  de constructibilidad, 88
  de determinación, 246, 303
  de elección, 44, 89, 154, 166s, 175, 188, 394
  de extensionalidad, 385, 412
  de infinitud, 174, 193, 143ss, 393, 403s
  grandes cardinales, 245

de la matemática, 248
máximo, 403s
de reducibilidad, 230
de reemplazamientos, 283
Axiomático, sistema (teoría de primer orden), 367
Axiomático, método 234
idea de G de, 275, 280, 335, 355
Axiomatización, 98, 264

Bach, J.S., 79, 202
Bacon, F., 329, 345, 135, 357
Balas, Yossef, 136
Barnett, Lincoln, 37
Baylis, C.A., 175
Beck, L. W. 358, 348
Behaviorismo, 226
Benacerraf, Paul, 57, 188
Benacerraf-Putnam, 284
Bergson, H., 186
Bomba atómica, 36, 164
Bernays P., 49, 139, 183ss, 186ss, 193ss, 278, 361, 366, 367
sobre el cálculo proposicional 361ss
sobre completud 141
sobre conceptos, 260
consistencia de la teoría clásica de, 101, 326
números,
«estructuras idealizadas», 282
sobre idealización, 283
vida 363s
sobre las matemáticas, 340
sobre objetos matemáticos, 259, 277
teoría de la prueba, 99, 277
reseña del ensayo de G sobre Russell, 319
sobre Wittgenstein, 113
Bernstein, A., 121
Besso, M.A., 171
Biblia, 117, 121
Bien supremo, 288
Blackwell, Kenneth, 173
Bohr, N., 86
Boltzmann, I., 53, 107
Bolzano, C., 133, 277, 358s
Bombieri, Enrico,
Boole, G., 161, 361
Booleana, álgebra, 254
Booleanos, modelos, 187
«Borel, determinación de», 295
Borel, Armand,
Born, M., 215
Bott, R., 178
Braudel, F., 342, 343
Brinton, C., 336
Broglie, L. de, 80
Brouwer, L.E.J., 83; 92, 945, 107, 128, 180
concepción de las matemáticas, 935, 248
consistencia y existencia, 308, 376
y G, 52, 110, 131; 135, 160
intuicionismo, 385, 389, 397s
reacción a la incompletud de G, 108, 141
y Wittgenstein, 105, 109s, 131
Brown, George W., 158
Brünn (Brno), 42, 53
Budismo, 292, 937s
Buena ordenación, teorema de, 424ss
Buenas ordenaciones, 243
Burks, Arthur, 127, 186

Cálculo funcional restringido, 370
Cálculo algebraico, 358
cambio 205, 216
objetividad de, 65, 254ss
subjetividad de, 270s
Campo arquimédeo, 97
Campo unificado, teoría de,
Campo, ecuaciones del 170, 207, 216, 225s
Cantor, G., 291, 394
hipótesis del continuo, 393
sobre Kant, 283
números ordinales, 383
problema del continuo, 393
procedimiento diagonal, 375, 393
resultado de la no denumerabilidad, 145
teoría de conjuntos, 240, 397s
Capital financiero, 145
Capitalismo, 341s
Característica universal, 13, 91, 289, 379, 417

Carnap, R., 42, 59s, 129, 131, 137s, 181
sobre G, 665, 113, 181s
influencia en G., 54, 265
interacciones con G, 99ss, 95ss, 125ss, 136, 240, 264
logicismo, 251
y Neurath, 128
Carr, D., 299
Carroll, Lewis,
Categorías, 213, 263, 281, 341, 347
teoría de, 401
Causa, 264, 267
Causación, 408
Cerebro y computador digital, 272
Certeza, 261, 238, 385
Chamberlain, 122
Characteristica universalis, 94
china, filosofía, 290, 337, 349
china, 199
chino, teorema del residuo, 84, 377
Chou, S.C., 235
Chuang Tzu, 290, 337s
Church, A., 87, 143, 152s, 416s
Ciencia apodícticamente rigurosa,
Ciencia, 47, 123, 219ss, 230, 293
fundamentos de, 110
y filosofía, 123, 212s, 345
natural, 230
«Científico-filósofo», 83
Cientificismo, 226
Círculo de Viena, 56, 106s
y G., 53, 59, 66, 91ss, 125ss
Civilización, 341
Clases, 402, 412
Clasicismo, 239
Combinaciones, teoría de, 98
Combinatoria, 92
Combinatorias, propiedades de símbolos, 389ss
Compacidad, teorema de 133, 242s
Completud, 97, 141, 218, 240, 248, 359, 360ss, 363ss
Comprehensión, axioma de 85, 137
Comprensión, 85, 137
Computabilidad, 61, 152s, 169, 171, 174
Computables, funciones 372ss, 391
Computador, 35ss, 38, 208, 230ss, 236ss
y conciencia, 345
digital, 272
Concepto(s), 41, 109ss, 112, 170ss, 215, 230, 239, 260
de concepto, 260, 399, 402
intuitivo, 236, 241, 261
matemático, 393, 398
percepciones, 406
primitivo, 210, 230, 307, 340
y principio del círculo vicioso, 426
y conjuntos, 412
teoría de, 399ss, 412, 413ss
universal, 399, 402
Conceptual, precisión 105
Conceptual, analismo, 59, 114, 378, 415, 418
Conceptualismo, 381
Conciencia religiosa, 108
Conectivas lógicas, 110
Confuncianismo, 332, 337
Confucio, 290
Conjunciones, 363
«Conjunto de», 400ss
Conjunto no-denumerable de fórmulas, 367s
Conjunto(s), 109, 161, 227, 261, 265ss, 277, 281, 284, 340
aritmético, 91
concepto bifurcatorio de, 397ss
concepto iterativo de, 392, 395ss, 398ss, 401, 403, 415
constructible, 279ss, 382, 394
definibilidad de,
de extensiones arbitrarias, 394
infinito, 395
matemático, 54
ordinalmente definible, 175
y principio del círculo vicioso,
«propiedad de», 420s
puro, 265ss, 268, 277, 281ss
sub-, 393ss
universal, 399
Conjuntos recursivamente enumerables,
«Conócete a ti mismo», 37, 225, 228, 323
Conocimiento, 351s, 355, 356
cotidiano, 186
Consistencia, 41. 248, 284, 307ss, 370

pruebas de, 97, 378s
relativa, 379
Constabel, Pierre, 289
Constantes individuales, 247
lógicas, 377
Constitución americana, 38, 177
Constructividad, 185, 187, 414
Constructivismo, 381s, 411, 419
Constructivos, ordinales 390
Continente europeo, y filosofía de G, 53
Continuidad, principio de, 331
Continuo, hipótesis de, 87ss, 90, 154ss, 157ss, 158, 161, 167, 169, 175, 188s, 196, 243, 244ss, 251, 279s, 392s, 395ss, 398ss, 401ss, 403ss
Continuo
potencia de, 397
Contradicciones, 110, 113, 283, 331
Convencionalismo, 383, 420s
«Convenciones», consistencia de, 286
Cook, S.A., 236
Corpúsculos, 347
Correspondencia uno a uno, 254
Correspondencia, teoría de 384
Corriente vital, 206
Corrimiento al rojo, 254
Cosmología, 79, 217
Cosmovisión, moderna 347
Courant, R., 139
Creación, 214, 304, 329
Creencias, 288
Cristo, 81
Cuantificadores, 373, 377
Cuatro colores, teorema de 110, 240
Cuerpos y conjuntos, 162

Dado, 114, 259, 407s
Darwin, 183, 304, 326
Darwinismo, 204
Davis, Martin, 195, 238, 281, 376ss
Dawson, John, 138, 144
Decidibilidad, 97, 133s, 141
Decisión, e intuición matemática, 404s
teoría de, 305
Decisión, procedimiento de 94, 236, 238, 240, 241, 255
Dedekind, cortadura de 248
Dedekind, R, 98, 374, 394
axiomas de Peano, 249, 273ss
prueba de objetos matemáticos, 277
teoría A, 245s, 275
teoría R, 235
Deducción lógica, 241
Deduccionismo, 226ss
Definibilidad, 85, 243
absoluta, 66
ordinal, 243, 383, 387
de primer orden, 383
Definiciones, 424, 425, 426
y conceptos, 419, 420
y pruebas 383
«Definite Eigenschaften», 402
véase también clases,
Deiforme,
Della Volpe, G., 309
Demócrito, 201, 293
Demostrabilidad, 281
Demostración, teoría de,
absoluta,
formal,
verdad y,
Descartes, R., 33, 35, 91, 209, 341
Descripción, teoría de, 414
Deseo, 322, 348
Determinismo, 215
económico, 226
Dewey, J., 186, 299, 318
Dickens, Charles, 186
Dictadura, 177
Digital, inteligencia, 36
Dilthey, W., 318
Dinámica, 212, 289
Ding-an-sich (cosa en sí), 39, 255, 311, 347, 407
Diofántico, 195
análisis, 138
décimo problema de Hilbert, 238, 377
ecuaciones, 64, 283, 300, 377
proposiciones, 377, 405
Dios, 96, 121, 287, 290, 336, 347
mónada central, 311
G sobre, 211, 225, 264, 268, 294, 293
moralidad kantiana, 291
personal, 291

de Spinoza, 209
Disyunción(es), 363, 377
Doderer, Heimito von, 39
Dominios arbitrarios, 365
Dostoievsky, F. M., 167
Dreben, B., 360
Dualismo, 334, 347
Dubislav, Walter, 138
Dukas, Helen, 72, 74
Dunhan, Bradford, 85
Dyson, Freeman, 179, 218

Eccles, W., 104
Ego, 319, 347
Einstein, premio, 46, 49, 66, 68, 120ss, 133, 146, 249, 280s, 290, 291
Einstein,
sobre arte y ciencia, 219
sobre el conocimiento empírico, 219
y G, 35, 48, 70s, 72s, 74s, 73, 77, 78s, 81, 176, 181ss, 202, 204ss, 209, 221, 232, 252s
sobre Kant, 122
y la filosofía, 120, 122, 214
sobre física, 214
y Russell,
sobre la teoría cuántica, 38s
Einstein, Jacob, 120
Einstein, Margot, 82
Eisenhower, Dwight D., 39, 76, 209
Eliot, G., 186
Ellentuck, Erik, 196
Emancipación, 352
Empirismo, 223, 283
analítico, 223, 277s, 286, 365
británico, 423
lógico, 286
Enciclopedia, 355ss
Engeler, E. 194
Engels, F., 36, 227
Enteros, 97, 170, 387, 401
conjuntos de, 243, 393s, 424
positivos, 376
Epifanía, 269
Epistemología, 212, 381, 399s
Erkof, p., 241
Eros, 347
Escolasticismo,
Esencia, y mundo, 108
Espacial, homogeneidad,
Espacial, invariancia, 254
Espacial, cuasi-, 277
Espacio, 179, 216, 254ss, 282, 347
euclídeo 216, 393
objetividad del,
Espacio-tiempo, 255
Espíritu de la época, 207, 287, 303
Espíritus, 38, 222
Estética, 230
Euclides, 216, 238, 245, 247
quinto postulado, 403s
Evidencia, 61, 184, 269, 1283, 423
concreta, 388s
empírica, 221
inmediata, 382
intuitiva, 65, 283
lógica, 422
matemática, 385ss, 392
Existencia
concepto de, 277, 329, 340
y consistencia, 307s
e intuición, 405ss
de objetos matemáticos, 277
Experiencia
interna y externa, 299
física, 407
rocas que tienen, 36
Expresable, 236
Extensional, lenguaje 96
Extensiones, 402
de propiedades definibles, 394
y matemáticas, 399
y conjuntos, 267, 413

Fanbatismo, 40
Fann, K.T., 115
Faraday, M., 36
Fascismo, 38
Feferman, S., 202
Feigl, H., 48, 59, 126, 132, 138
Feller, William, 143, 170, 273, 374, 384, 418
Fenografía, 228
Fenoménica, objetividad, 41
Fenómenos, 311
Fenotipo, 228
Fermat, conjetura de, 170, 273, 374, 384, 418

Feuerbach, 350
Fichete, J.G., 227, 334
Filosofía griega,
Filosofía
y ciencia, 122ss, 184ss, 207, 211s
de esencias, 299
idealista, 178, 234
e intuición, 409
como teoría exacta, 225, 204, 287, 289, 301
unificada, 39
Finalidad e intuición, 201
Finita, computación 132
Finitario, razonamiento, 381
Finitismo, 232s, 239
Finitos, órdenes, 424
Finitud, 411, 424
Finsler, Paul, 53, 137
Física, 206, 213ss, 216ss, 233, 394
cuántica, 215
Einstein sobre, 214
éxito de, 58
y filosofía, 214ss, 217s, 230, 290
filosofía de, 58, 123
leibniziana, 289
y matemáticas, 58, 102, 108, 218s
teórica, 58, 96, 296
Fisicalismo, 226s
Físicas, leyes, 34, 272
Físico, mundo, 208
Flexner, Abraham, 146, 260
Ford, L.R., 174
Forma(s), 358
kantiana, 311
Formal, deducibilidad 370, 397
Formal, método, e intuicionismo, 375
Formales, sistemas, 236, 247
Brouwer y, 369
completo, 139, 359
completud, 97
concepto de, 138
y consistencia, 41, 379
escuela hilbertiana y, 361
de Frege y 7.F, 246s
geometría euclídea y, 243
G y, 201, 232, 335, 361ss, 364ss, 367ss
e incompletud, 376
e infalibilidad, 358
de lógica elemental, 361ss, 364ss, 367ss
de matemáticas, 60, 141
y matemáticas, 371ss, 374ss, 377ss
proporciones indecibles y, 369
y «pureza» 240
y sistemas axiomáticos, 233, 255
Zermelo, 143
Formalismo, 60, 251
teoremas de incompletud de G y, 374
Formalización, 113, 322s
ideal de, 240
Forman, Phillip, 146, 178
Fórmulas, 98
Foucault, M., 307s, 339, 350s
Frank, Philipp, 79, 212
Frege, G., 366s, 1400s, 418, 419
Bedeutung, 420
Begriffsschrift, 247, 273, 358, 361s
cálculo proposicional, 363
y Dedekind, 273
y formalización, 247
y G, 39, 261, 280
e intuiciones geométricas, 378
matemáticas y lógicas, 248, 426
reglas para la lógica elemental, 235
Freud, Sigmund, 121, 199, 210s, 326, 347
Friedman, H., 143
Fuerza, 65, 212, 289
Fun-Yu-lan, 339
Funciones, en lógica elemental, 245
Funciones abelianas, 127
Fundamental, análisis conceptual,. 59
Fundamentales, desarrollos conceptuales, 46
Furtwängler, P., 52, 39

Gabelsberger, Franz, 114
Gärtner, C.F. von, 233
Gauss, K.F., 31
Gentzen, G., 87, 102, 146, 378ss
Geometría, 137, 139, 241, 279, 361, 403
consistencia de, 99
elemental, 235
euclídea, 245
Kant y, 216

no-euclídea, 247
George A. Brutian, 195
Giacomelli, Alberto, 199
Gödel, Adele, 38, 39, 130
Gödel, Kurt, 137, 180
«argumento del éxito» 384, 405
aritmética y percepción sensorial 423
sobre Carnap, 90, 113
Cartas teológicas, 187
Círculo de Viena, 91, 96, 118s, 130
completud, 60, 233s, 240s
concepto iterativo de conjunto, 410
conceptos abstractos, 389
sobre conceptos, 11, 214, 260ss, 405
«conexión de Princeton», 63
conjuntos constructibles, 90, 153, 154, 157, 238, 279, 281, 383, 393, 395, 410
conjuntos, conceptos y clases, 385, 418s
«conócete a ti mismo» 371, 225, 288, 223
correspondencia con su madre, 72, 82
y cuatro problemas de Hilbert, 10ss, 370
«datos» matemáticos, 423
demostración ontológica de Dios, 268
y Einstein, 35, 48, 70, 72, 74, 77, 78, 81, 176, 181, 202, 204, 209, 221, 232, 252
ensayo sobre Cantor, 244, 385s, 392ss, 394ss
ensayo sobre Russell, 171s, 138ss, 428
ensayo sobre Bernays, 184, 385ss
ensayo sobre Carnap, 244, 385s, 392ss, 394ss
examen para conseguir la ciudadanía, 38, 177s
filosofía de la matemática y de la lógica, 93, 385, 393
y filosofía kantiana, 179, 215, 232ss
grandes conjeturas, 133s, 261
hipocondria, 51
hipótesis del continuo, 279, 281
sobre Husserl, 91, 223, 269
sobre la idea de objeto, 407
incompletud, 60, 135s, 152, 173, 234ss, 241ss, 245, 270, 275, 286, 357ss, 410, 423
sobre Leibniz y Voltaire, 61
sobre el lenguaje, 151
sobre lógica matemática, 415, 416ss
matemáticas y física, 422s
sobre el método de la filosofía, 184s, 225, 339
muerte de, 201
Nachlass, 37, 44, 67, 105, 123, 124, 136, 140, 142, 143, 151, 152, 157ss, 182, 193, 198, 252
sobre nominalismo, 419, 420
nota sobre incompletud, 376
sobre objetos de la teoría de conjunto, 250, 405s
obras posteriores a 1940, 165ss
sobre otra vida, 291ss
peculiaridad de, 83, 41, 68
período matemático y filosófico, 63
períodos filosóficos, 47
sobre el peso de la fama, 34, 35
Platón y Aristóteles, 223
precisión conceptual, 105, 222
«prejuicios de la época», 38, 41, 222, 277, 288, 294, 301s
principio del círculo vicioso, 420, 423s
publicación póstuma, 45
realismo, 384, 406ss, 419ss
recogida de datos, 37, 357
sobre religión, 295
y Russell, 173, 419ss, 426
salud, 40, 51, 117, 118, 145, 152s, 155, 156, 178s, 195, 201
semi-percepción, 407s
talento para dejar de lado, 37, 105
teoría axiomática y método, 233
teoría de conceptos, 415ss
teoría de la relatividad, 217
teoría exacta de la metafísica, 296s
sobre teoría cuántica, 216
tesis filosóficas, 33s; 44, 54, 90, 106, 323ss, 326, 406s

sobre el trabajo de Einstein, 73, 79s, 208, 217
trabajos no-publicados resumidos por, 445
sobre verdad e influencia 288, 303
vida familiar, 40
sobre la vida pública de Einstein, 76
sobre Wittgenstein, 92, 113, 127
y Wittgenstein, 53, 55, 58, 91, 104, 115
y Zermelo, 439
Gödel, Marianne, 71, 88, 116s, 193
Gödel, Ruydolf (hermano), 116
Gödel, caso de, 133s, 151, 196, 362
Gödel, numeración de 374
Goethe, J.W. von, 376
Goldbach, conjetura de, 170, 273
Goldfarb, Warren, 134
Goldmann, Lucien, 348
Gomperz, Heinrich, 54, 59
Gradualismo, 228
Gramática, 108
Grandjean, Burke, 52
Gravitación, teoría de, 217
Greenberg, M. J., 217
Grossi, Marie,

Hadamard, J.,
Hahn, H., 48, 54, 66, 133, 138, 153, 158, 343
y G, 36, 34, 35, 86, 87, 126s, 147
Haydn, F. J., 79
Hegel, G.W.F., 36, 230, 843
contradicciones, 116
G y, 344
lógica, 344, 413
Marx sobre, 349ss
Fenomenología del espíritu, 34
Heijenoort, J. van, 360, 367
Heisenberg, W., 138
Hempel, Carl, 196
Herbrand, J., 87, 134, 142, 186, 236, 365, 378
Herder, J. G. von, 312
Hertz, Heinrich, 107
Heyting, A., 94, 137, 141, 142, 231, 383, 348
Hilbert, D., 98ss, 99ss, 102ss, 106, 109, 132, 137
Bernays y, 138, 263
cuatro problemas, 98ss, 378
décimo problema, 238, 377
escuela, 361
finitismo, 301, 383, 388s
formalismo, 60
G y, 61, 100s, 139
hipótesis del continuo, 89, 153
matematemática, 95
práctica matemática, 287s
teoría de la prueba, 975s
Hilbert-Ackermann, 359, 380, 361s, 365
Hilbert-Bernays, 139, 242, 364, 372
Historia, 230, 348, 349
Historia antigua, 43
Hlawka, E., 31
Hofstadter, D. R., 202, 232, 236, 278
Hölderlin, J. C. F., 36
Holismo, 229
Hong-Hsiu-chuan, 387
Humanismo, 349
Humano, conocimiento, 80
Hume, D., 128
Husserl, F., 46, 190, 197, 119, 121, 134, 184, 187, 325, 330, 344, 407
cosmovisión, 345
Crisis, 299, 300
G sobre, 91, 225
G y, 345, 47, 64, 66, 68, 109, 123, 155, 184, 223, 230, 265, 269, 299, 301s
Crisis, 299, 300
Meditaciones cartesianas, 299
Filosofía como ciencia rigurosa, 299ss
Huygens, C., 36

Id, 347
Idea(s), 108, 264
Idealistas modernos, 65
Idealización, 221, 224s, 278, 282, 299, 381, 398
y ciencia, 239
e intuiciones 261, 283
y matemáticas, 189s, 282
Idealizadas, estructuras, 189s, 282
Ideen, 96, 297
Idéntico, sujeto-objeto, 348s

Identidad, 366
y caso de Gödel, 134, 196
en Ha, 361s
en PM, 361s
Iglesia católica, 117
Igualdad y «nivelación», 249
Imágenes, 265, 286
Imperativo categórico, 348
Imperio austro-húngaro, 53
Impredicativas, definiciones, 424s, 427
Impresiones
abstractas, 261
sensoriales, 260, 261
Inagotabilidad», 218
Incertidumbre, principio de,
Incompletud, 60, 284, 370s, 373ss, 376ss, 379ss
Inducción, 249
matemática, 113, 282
Inductivas, definiciones, 381
Infalibilidad lógica, 358
Inferencia, reglas de, 361, 366
Infinitesimal, análisis, 358
Infinitud, 195, 270, 382, 381
y nominalismo, 381, 411
de números, 113
Infinitos, dominios, 370, 381
Ingeniería, y física, 112
Inmortalidad,
Instituto de Estudios Avanzados, 36, 67, 83
Integrales, newtonianas, fórmulas, 217
Intelecto, 347
Intelectual, atmósfera de comienzos del siglo xx, 57
Inteligencia artificial, 203, 232, 236, 345s
Intensional, lenguaje, 96
Intensiones, 399, 412
Interpretaciones, consistencia de las, 379
Intersubjetividad, 299
Introspección, 202, 224
Intuición, 41, 184s, 215, 221, 240
concreta, 388s
de re y de dicto, 409
y demostración,
espacial, 216
física, 216
geométrica, 216, 226, 228
e idealización, 283
matemática, 195, 216, 397, 398
y matemáticas, 93
y procedimiento mecánico, 278
pura, 347
sensorial, 236
de teoría de números, 226
Intuicionismo, 44
Brauwer, 249a
y constructivismo, 381
y resultados de G, 269, 379s
Intuitivos, dominios, 398
Invariación temporal, 217
Irresolubilidad,
Isomorfismo, 364
Isotropía, 234
Iteración, 401
transfinita, 241, 266
Iterativa, jerarquía, 243

Jacob, F., 341
James, William, 298, 317, 318
Jen (persona), 349
Jensen, R. B., 242, 403
Jerarquía ramificada, 154, 279ss
Johnson, Samuel, 107

Kafka, F., 38, 187s
Kakania, sociedad, 108
Kanamori, A., 244
Kant, 44, 47, 48, 106, 107, 120, 175, 187, 227, 230, 260, 270, 282, 287s, 291, 304, 308ss, 327, 330, 339, 341, 342, 343, 344, 345ss, 378, 398, 407, 408
Cantor sobre, 283
categorías, 281, 331
Ding-an-sich, 42, 407
Einstein sobre, 123, 214
G y, 53, 57, 121, 125, 179, 187, 230
G sobre, 41, 282
y Leyniz, 308s, 326
Razón pura, 304
subjetivismo, 406, 408
y teoría de la relatividad, 65s, 179, 215s

Kästner, Gottfried, 38
Kaufman, Bruria, 182
Kaysen, Karl, 192, 198
Keynes, J. M., 322
Kierkegaard, S., 107, 313
Kleene, Stephen, 87, 142, 152
Kneale, William y Martha, 355
Ko, Antai,
Kochen, S., 202
Köhler, Eckehart, 41, 124, 129, 145, 165, 177
Kolmogorov, A. N., 141
Kraus, Karl, 31, 107, 108
Kreisel, G., 183, 202, 281, 344, 426
Kreisky, Bruno, 71
Kronecker, L., 240

L-formes, modelos, 243s
L-formes, estructuras, 403
Lackey, D., 422
Latta, R., 347
Lehar, Franz, 138
Leibniz, G. W. 34, 35, 38, 46, 51, 223, 229ss, 265s, 287, 310, 311, 323, 330, 335, 374, 382
Characteristica universalis, 418
concepto de fuerza, 65, 212, 289
G y, 33, 34, 55, 56, 84, 91, 92, 96, 123, 224s, 230, 264, 267
G sobre, 161s, 289, 308s, 376
y Kant, 308, 376
lógica, 355s
lógica matemática, 170, 356, 410, 417, 418
metafísica, 186
Monadología, 212, 291, 308, 312, 347, 357
Nuevos Ensayos, 312, 347, 358
optimismo, 297, 298
percepciones, 347
principios, 331
procedimiento de decisión en matemáticas, 240s
sobre el silogismo, 358
Teodicea, 308
y Voltaire, 161
Wolff, 289
Lenguaje cerrado, Cohen, Paul J.,
Lenguaje, 108ss
centro neuronal de, 266
cerrado, 93
formal, 143
Frege sobre, 338
G sobre, 131
ideal universal, 353
nominalismo y,
simbólico, 113
sinonimia, 96
verdad en, 137, 357
Wittgenstein, 108, 10, 114
Lenin, V. I., 145
Lessing, G. E., 312
Ley del tercero excluido, 93, 370, 381
Leyes
conservación, 308s
físicas, 34, 272
mecánicas, 272
naturales, 96
newtonianas, 208
Libertad, 358
Libre albedrío, 121, 290
Lichtenberg, G. C., 107
Locke, J., 36, 128, 325, 347, 373
Lógica, 59, 97, 109ss, 172, 248, 260, 277, 344, 355, 358s
algorítmica, 97
axiomatización de la, 98
de Brouwer, 109
clásica, 109
conceptos primitivos de la, 415, 418
constructiva, 426
dialéctica, 415
elemental, 226, 232s, 240, 246, 357, 359, 360s, 373, 377
formal, 415, 426
intuicionista, 61, 141, 146, 387
matemática, 59, 90, 113, 145, 170, 243, 251, 356, 364, 373s, 399
meta-, 53, 59, 94, 360, 361
modal, 149
multivalorada, 364
simbólica, 98
como teoría de conceptos, 403, 413, 415ss
Lógica, mente, 37
Lógicamente posible e imposible, 38, 287
Lógicas, inferencias, 358

Logicismo, 231, 374
Lógico, experiencialista, 301
Lógico, positivismo, 80
Longitud de onda, 358
Loos, Adolf, 106
Löwenheim, L., 361
Lu Hsun, 293
Lukacs, G., 349

Macaulay, T. R., 186
Mach, principio de, 255
Mach, E., 116
Macrocuerpo, 216
Magidor, M., 244
Mahlo, P., concepto general de conjunto, 396, 402s
Malament, David B., 253
Manipulación simbólica, 285, 358, 400
Máquina, 204, 211, 270, 345
Marcos inerciales locales, 379
Martin, D. A., 245
Marx, K., 36, 69, 186, 227, 230, 287s, 304, 330, 345, 348s
  sobre Hegel, 349
Marxismo, 230, 299, 321
Matemática, inducción, 94, 282, 424
Matemáticas, 108s, 161, 167, 213, 230, 234, 240, 243, 248, 249, 260, 277, 279, 281, 282, 320, 352, 357, 370, 384, 397, 400
  y certeza, 423
  clásica, 94, 138, 141, 251, 378, 426
  consideraciones intensionales, 93, 208, 218s
  construccionismo, 397
  contemporánea, 195, 377
  convencionalismo, 383
  «datos» en, 423
  existencia de objetos, 404ss
  filosofía de, 254, 277, 284, 374, 381, 409
  finitaria, 387, 392
  fundamentos de, 232s, 251, 357
  inagotabilidad de, 390
  ingenua, 370
  intuicionista, 141, 109, 231, 260
  meta-, 94, 144, 361, 365
  nominalista, 182
  recreativa, 364
  y la teoría de la inexistencia de clases, 243
  como teoría de conjuntos, 413
  y sintaxis, 60, 90
  teórica, 170, 418
  universal, 358
Matematización, naturaleza de, 300
Materia, 35, 206, 253s, 265, 271, 311, 334
Material, sustrato, 347
Materialismo, 223, 311, 349
  dialéctico, 199
Matijasevic, Yuri, 377
Mauthner, Fritz, 54, 107s
Máxima indulgencia, principio de, 331
Maxwell, J. C., 36
Mayer, Walther, 127
Mecánica, newtoniana, 217
Mecanicismo biológico, 34, 38
Mecanicismo, 234, 278
Mecánico, procedimiento, 232, 238, 278, 358, 380, 383ss
Mecanización, 234
Mendel, G., 332
Menger, K., 49, 60, 63, 86s, 91, 124, 129, 14, 151, 156, 158, 159, 161, 168, 244
Menger, Colloquium de, 128, 133s
Mensurable, cardinal, 396
Mente, 265
  filosofía de, 247
  y máquina, 206s, 211, 271, 345
  y materia, 34, 207, 334
  y mónada, 205
  origen de, 206
  separada, 38
Merleau-Ponty, M., 299
Metafísica, 41, 167, 264, 267, 269, 286, 289
  alemana post-kantiana, 91
  conceptos primitivos de, 211, 230, 264
  como filosofía primera, 223
  G y, 68, 91, 165, 186, 212s, 218s, 223, 229, 264, 299, 335
  y matemáticas, 358
  religiosa, 290, 295
Metáforas, 221, 227
Metodología, 226

Meyes, R. W., 312
Mill, J. S., 186
Milnor, John,
Mitchell, W., 243
Modelo, 367s
Modelos, teoría de, 242, 243
Modus Ponens, 334
Mohammed, 81
Moloc, 227
Mónada, 225s, 264s, 294, 311, 313
Monadología, 230, 265, 269, 289, 331
  G y, 35, 86, 232, 263
  como filosofía unificada, 38
Montaigne, M. E., 344
Moralidad, 230, 291
Moravia, 116
Morgan, A. de, 161
Morgenstern, O., 49, 70, 76, 158, 161, 177s, 195, 198ss
Morse, M., 151
Moses, 81
Mostowski, A. 155, 158, 159
Movimiento medio,
Movimiento nacionalista checo, 55

Nacionalismo, 211, 139
Nazismo, 161
Nägeli, G., 233
Natkin, M. 49, 59, 127
«Natural, filosofía», 36
«Natural, especie», 35
«Natural, filósofo», 35
Naturaleza, 350
  constitución de la ( ) física, 292
  matematización de, 300
Naturalismo, 399
Necesidad, 267, 347
Negación, 377
Neugebauer, O., 138
Neumann, J. von, 49s, 89, 99, 137, 143, 154ss, 157ss, 160, 179, 183, 186, 237, 251
Neumática, 347
Neurath, O., 54, 128ss, 131ss
Neurofisiología, 261
Newton, Sir Isaac, 35, 46
  física y metafísica, 68, 213, 217s, 220
  y Goethe, 121
  y Leibniz, 66, 68, 212, 230, 289
Nietzsche, F. W., 347
No-finitario, razonamiento, 365
No extendibilidad, 97
Noether, E., 87, 146
Nollan, Richard, 93, 134
Nombres, 421
Nominalismo, 411, 419s
  e infinitud, 391ss, 394s
Noumena, 311, 347
Numérica, computación, 247
Numéricas, variables, 95
Número(s), 111, 227, 230, 277, 282
  cardinal, 84, 97, 166, 137, 243, 392
  denumerable, 278
  inaccesible, 403
  infinito, 92, 152, 400
  natural, 88s, 109, 226, 241, 241, 245ss, 250
  ordinal, 83, 97, 154, 241, 278, 387, 425
  primo, 384
  real, 85, 90, 97, 109, 137
Números, teoría de, 242ss, 245ss, 248ss, 280, 369
  analítica, 405
  de Brouwer-Heyting, 383
  clásica, 238s, 284, 383, 387
  consistencia de, 35, 98
  elemental, 247
  finitaria, 92, 152, 400
  formal, 141, 378
  intuicionista, 61, 67, 89, 166, 194, 243, 260, 283, 388
  objetivismo en, 260

Objetividad, 54
Objetivismo, 57, 66, 223s, 258ss, 273ss, 276ss, 279ss, 282ss, 311
Objeto(s), 54, 204ss, 267, 286, 384ss, 407, 423
  bien definido, 267, 401
  concreto,
  físico, 89
  matemático, 216, 258, 265, 277, 279, 382, 389, 396ss, 406ss
  de teoría de conjuntos, 259s, 406ss
Occidentalización, 339
Ogden, C. K., 115
Omega-consistente, 373

Ontología, 269-382
Oppenheimer, J. R., 76
Optimismo, 296
  americano, 298
  racionalista, 222, 263, 265, 270
Ordenes, teoría de, 424ss
Ordinal, definibilidad, 243
Ordinales transfinitos, 425
  arbitrarios, 424
Otra vida (mundo), 336

Panteísmo, 55
Paradigma, 365
Paradojas, 85, 392, 399, 421
  intensionales 399, 421, 426
  lógicas, 426
  semánticas, 137, 421
Parménides, 255
Parsons, Charles, 282, 398
Partículas elementales, 347
Pascal, B., 107
Pasch, M., 427
Pauli, W., 173, 216
Peano, G., 170, 176, 417ss
  aritmética, 86, 111, 142, 245
  axiomas, 97, 249, 273, 293
Pears, D. F., 410
Peirce, C. S., 318, 362, 419
Penrose, R., 253, 255
Percepción sensorial, 350, 422
Percepción(es), 213, 255, 261s, 329, 347
Perennes, cuestiones, 41
Periodismo, 226
Pesimismo, 31
Plank, Max, 129
Platón, 48, 58, 64, 91, 127, 223, 270, 228, 289, 323, 347, 254
Platonismo, 92, 172
«Pluralidades de cosas», 412
Poincaré, H., 383, 397, 423
Polinómico, 377
Polinómico, tiempo, 236
Política, 145, 226
Popper, K. R., 182, 282
Posibilidad, 267
Posible y real, 268, 340ss, 348ss
Posibles, mundos, 268, 340, 345, 365ss
Positivismo, 214, 269, 307ss
Post, E., 153, 364
Práctica, 30
Pragmatismo, 114, 300
Praxis, 227
Precisión, 58ss, 222, 272, 308, 329, 343
Predicados, cálculo de, 252
Predicados, 247
  decidibles, 372ss
Predicados recursivos primitivos, 373s, 377
Predicativas, variables, 361
Predicatividad, 411, 424ss, 427
Predicativismo, 382
«Prejuicios de la época», 38, 41, 222, 277, 287, 294
Preston, Jean
Principia Mathematica, 85, 249
  G y, 53, 131, 134s, 360
  incompletud, 371, 374ss
  inducción matemática, 115, 250
  y lógica matemática, 418s, 424ss, 428
  y procedimiento mecánico, 233
Principio heurístico,262s
  de G, 56, 60 275s
  filosofía como, 65, 141, 142, 251, 383, 398
«Principio», 331
Probabilidad, 94, 343, 270
«Problemas, transmutación de», 101ss
Procesamiento de datos, 358
Profundidad, y precisión,
«Progresión autónoma»,
Proletariado, 348ss
Propiedad, 247, 260s
Proposición(es), 358, 425
  atómica, 115
  concreta, 95ss
  cotidiana, 114
  cuantificada, 363
Proposicional, cálculo, 235s, 268, 301ss, 364
Proposiciones indecidibles,
  y prueba de imposibilidad,
  en sistemas formales,
  y verdad en un lenguaje,
Proposiciones atómicas, 108
«Proyecciones propicias», 233, 263

Prueba(s) 65, 90, 110
y definiciones, 382
finitaria, 378
imposibilidad, 238
interpretaciones de, 284
e intuición, 278
Psicoanálisis, 297
Psicología de la Gestalt,
Psicología, 280
Punto-mundo, 254
Putnam, H., 57, 188

Quine, W. V., 138, 1805
estratificación, 417

Rabel, G., 310
Racional, 41, 51
«Racional, núcleo», 34
Racionalidad, 40, 283, 285, 293, 308
Racionalismo, 71, 223, 297s, 308
Ramsey, F. P., 95, 107s
sobre Wittgenstein, 114
Rautenberg, Wolfgang, 189
Razón, 203, 265, 299, 308, 345
pura, 224, 280, 295
Razonamiento, y certeza, 385
Realidad, 214s
física, 259
objetiva, 91, 162, 277, 281, 284, 391, 407ss
Realismo, 66, 216
conceptual, 58, 66, 208, 223, 258ss, 261ss, 264
matemático, 54, 65, 208, 223, 260, 381, 397, 419ss, 422ss
Recursión, 376
Recursivas, funciones, 84, 89, 142, 158, 374
generales, 236, 378
primitivas, 74, 376, 383
Recursivo, ordinal, 424ss
Reduccionismo, 226s, 229, 262, 326, 419
Reducibilidad, teorema transfinito de, 425
Reflexión, 347
Reichenbach, H., 138
Reid, Constance, 192
Reidemeister, K., 138
Reino de la libertad, 348s, 352
Relación(es), 247
decidible, 371
Relatividad, teoría de, 107, 214, 232, 249, 252
y filosofía kantiana, 179, 216, 252, 235s
y filosofía, 216
Relativismo, 300
Religión, 41, 121, 230
racional, 34, 211, 225, 229s
Religión taoísta, 339
Renacimiento, 304
Richard, Jules, 53
Richard, antinomia de, 375
Riemann, G. F. B., 170
Robinson, Julia, 377
Rosenthal-Schneider, Ilse, 122
Roser, J. B., 87, 152, 373
Rotación cósmica, 42, 64, 165, 178ss, 252
Rowbottom, F., 243
Royce, J., 318
Russell, B., véase también *Principia Mathematica,* 46, 104, 107, 114, 121, 172s, 211, 220s, 248, 283, 386s, 418
«ámbito limitado de significación», 417
axioma de reducibilidad, 249
axiomatización de lógica 98
desarrollo filosófico, 315
«el», 313
ficcionalismo, 411, 414, 414
G sobre, 173
sobre G. 173
idea de lógica, 361
inducción matemática, 248ss
Introduction to Matemátical Philosophy, 125, 248, 420
logicismo, 251
sobre la logística, 422
navaja de Occam, 419
paradojas, 212s
y Poincaré, 315
Principles of Mathematics, 410
principio del círculo vicioso, 410, 414, 421, 422(6) 428
realismo, 420, 424, 428

teoría de las descripciones, 420, 423
teoría de la inexistencia de clases, 410, 420
y Wittgenstein, 108s, 134, 173, 414

S. Agustín, 107
Salvación, 290
Santayana, G., 318ss
Satisfacibilidad, por un modelo, 370
Schelling, F. Von, 344
Schiller, J. B. von, 36, 138
Schilpp, P. A., 78, 175, 181
Schimanovich, Werner,
Schlick, M., 49, 54, 59, 66, 127ss, 130, 155, 158
Schnitzler, Arthur, 39
Scholtz, A., 138
Schönfinkel, M., 99
Schopenhauer, A., 104, 107, 347
Schröder, E., 361ss, 418
Schrödinger, E., 119
Schumann, Karl, 122
Schur, I., 140
Schütte, K., 186
Schutz, Alfred, 308
Schwinger, Julian, 179
Scott, Dana, 45, 196, 243
Seeling, Carl,
Semi-tautologías, 182, 217
Sensación, 162, 281, 407ss
Sentido y sinsentido, 108
Sentidos, y construcción mental, 215
Ser, 214, 427
Shen-Yuting, 145, 199
Siegel, C., 87, 146
Silogismo, 358
Símbolos, 390
Simetrías espacio-temporales, 217
Sinonimia, 96
síntesis, 281, 311, 358
Skolem, T., 252, 360ss, 366ss, 370, 374
Skolemiana, formal normal, 366
Smith, Adam, 320
Smith, John E., 318
Sobrenatural, 222
Socialismo, 145, 210
Sociedad planificada, 145
Software, 234
Solidaridad, 352
Solovay, R. 182, 201, 243
Solovine, Maurice, 122, 211
Specker, E., 179, 363s
Spector, C., 183, 187, 390, 425, 427
Spencer, H., 345
Spengler, D., 343
Spinoza, B.,55, 80, 210 298
Spranger, W. 109
Sraffa, P., 107
Estadística, 112
Stein, Howard, 217, 253
Stevenson, A.E., 210
Straus, E. G., 71, 171, 175, 218
Strauss, Richard y Johann, 39
Subjetividad, 185, 299
Substancia, 264, 260
Substitución, reglas de, 361ss
Superego, 346
Superestructuras, 224
Suprasensorial, 227

Talmud, Max, 50, 120s
Taquigrafía Gabelsberger, 105, 119
Tarski, A., 136, 144, 146
Taussky-Todd, Olga, 124ss
Tautología, 236, 357
Tecnología, 232ss
Temporiformes, curvas, 217
Tennenbaum, Stanley, 65, 187
Tennyson, A., 186
Teología, 96, 119, 223
racional, 264, 290
Teorema del abanico, 391
idea de G de,
Teoría cuántica, 38, 81, 168, 215ss, 424
Teoría unificada, 219, 249
Teoría de primer orden, 367ss
Teoría de conjuntos, 82, 90, 96, 110, 152, 168, 174, 242ss, 245ss, 260, 266, 285, 340, 391ss, 397ss, 400ss, 403ss, 406ss
axiomática, 87, 248
y conceptos, 412s
formalizada, 378
ingenua, 401
paradojas de, 401
predicativa, 260
Teorema bien ordenado, 424s
Término medio (dorado),

Thackeray, W. M., 186
Thirring, Hans, 124, 127, 163
Tiempo, 179 206s, 216s, 252ss
  global, 178
  objetividad del, 65
  subjetividad del, 271
Tiempo exponencial, 236
Tiempo mundano, 356
Tipos, jerarquía de, 95
Tipos, teoría de, 85ss, 376
  finita, 89, 187
  ramificada, 383
  simple, 428
Tocqueville, A. de, 186
Tolstoy, I. N., 107
Topología, 89
Totalidad, 425ss
Toynbee, A. 345
Tractatus (Wittgenstein), 105ss, 111s, 128, 343ss, 357, 363
  G y, 59, 109, 125ss
  Ramsey y, 114
  sentido y sinsentido, 108, 361
Trascendencia de II, 403
Transparente, método, 379
Transparentes, construcciones, 109
Tripitaka (Hsüan-tsang), 339
Trotsky, h., 145
Tshen Yinco, 339
Turing, máquina de, 64, 183
Turing, A. M., 64, 183
  y computabilidad, 153, 169
  números computables, 236, 278
  «lógica ordinal», 241
  procedimiento mecánico, 278, 376ss
    y resultados de incompletud de G, 182, 190, 232, 234, 377,
  y sistemas formales, 100, 140, 233
  y Wittgenstein, 107

Ultra-mundano, 536
Unicornio, 421
Unidades, 281, 407, 413
Universales, integrales globales, 217
Universalitas y universitas, 352
Universos rotatorios, 356

Vallentin, Antonina, 80ss
Variables complejas, 87
Veblen, O., 63, 70, 145, 151, 160, 172
«Ver como», 108
Verdad, 63, 138, 287
  aritmética, 273, 276, 370, 373
  y consistencia, 41
  e influencia, 303
  en un lenguaje, 137, 186, 375
  lógica, 357
  matemática, 137, 277, 280
  y objetividad, 239
  y paradoja, 95
Verificación, 405
Viaje en el tiempo, 178, 208, 234
Vico, G., 317
Vida, y mente, 206
Voltaire, F.M.A. de, 161, 297
Voluntad, 108, 347, 348

Wagner, R., 186
Waismann, F., 94, 131, 137s, 157
Wald, A., 134, 157
Wallas, Graham, 345
Wang, Kuo-wei, 339
Wang-sian-hung, 155, 156, 157
Warner-Jauregg, J. von, 153
Webb, Judson C., 233
Weber, M., 308
Weibel, Peter,
Weil, A., 202
Weininger, Otto, 106
Wefel, Franz, 38
Wesenschau, 409
Weyl, H., 98, 151, 172, 397
Whitehead, A.N., 98, 138
Whitney, Hassler, 91, 181, 202
Williams, R., 307
Windelband, V., 344
Wirtinger, Wilhelm, 126
Wittgenstein, *véase también Tractatus, 103ss, 106ss, 109ss, 129, 130, 135, 282, 283, 328, 361, 381*
  Bernays sobre, 113
  y Brouwer, 105, 109, 133
  y C, 53, 55, 57, 91, 103ss, 106ss, 109ss, 134
  G sobre, 92, 113
  Philosophical Investigations, 105, 108
  Ramsey sobre, 114
  sobre resultados de G, 111

y Russell, 172
último, 107, 11, 305, 382
y el Círculo de Viena, 56, 107

Wolff, Christian, 289
Woodin, W. Hugh, 244s, 403
Wright, G.H. von, 105, 114
Wu-Wen-Tsun, 235

Zeitgeist, 287s, 318
Zemanek, H. 177
Zen, 337
Zermelo, E. 37, 94, 119, 146, 375, 283
clase, 402
y G, 143s
teorema de la buena ordenación, 394
teoría axiomática de conjuntos, 248
Zermelo-Fraenkel, 85, 87, 243, 246, 402, 403
Zoología, 172, 420
Zweig, Stefan, 38